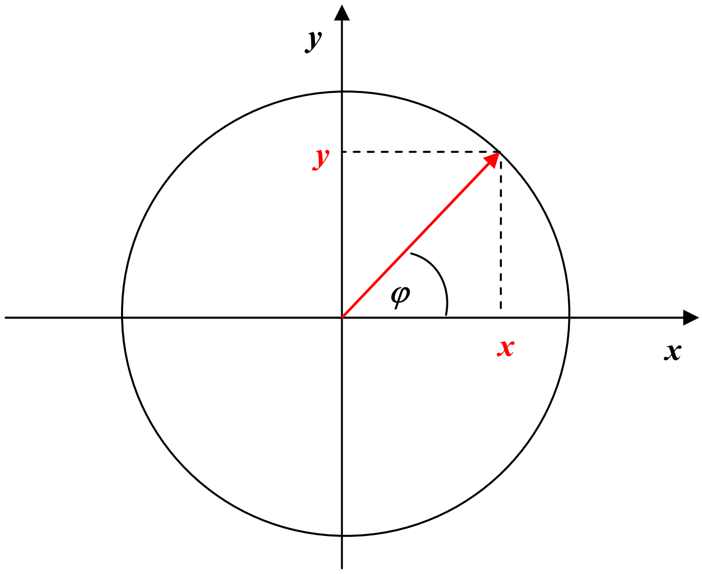
Zastosowanie pochodnych i całek: problemy i zadania

Obiekt krąży ruchem jednostajnym (wartość prędkości nie zmienia się) po okręgu o promieniu r. Jeżeli początek kartezjańskiego układu współrzędnych umieścimy w środku tego okręgu to wektor wodzący tego punktu będzie miał niezmienna długość i będzie jednostajnie wirował zakreślając w jednostce czasu kąt ω. Położenie punktu w dowolnej chwili czasu t możemy opisać równaniami:

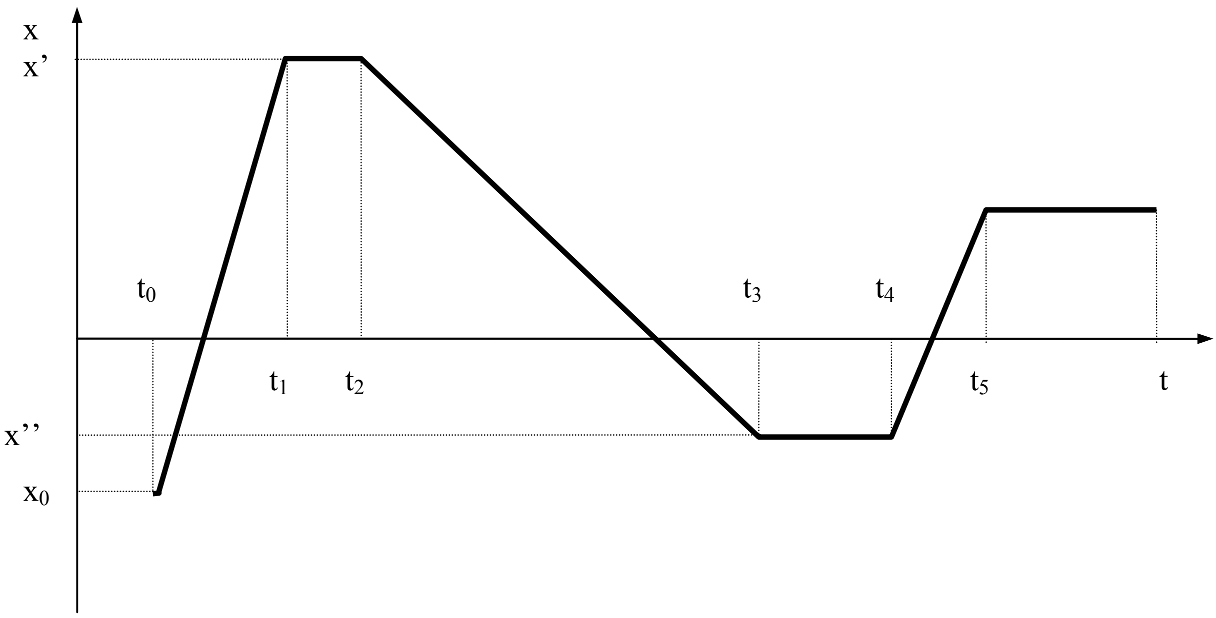


$$x = r\cos\varphi = r\cos\omega t$$
$$y = r\sin\varphi = r\sin\omega t$$

Opisz słowami ruch tego obiektu.
Znajdź wzory opisujące prędkość i przyspieszenie obiektu. Wyraź w jawnej postaci wektor przyspieszenia obiektu i pokaż, że jest on skierowany do środka okręgu (dlatego nazywamy je przyspieszeniem dośrodkowym)
Podaj kilka życiowych sytuacji, w których występuje ten rodzaj ruchu i wskaż w swoich przykładach siłę dośrodkową będącą przyczyną przyspieszenia dośrodkowego.

Uzasadnij odpowiednim rachunkiem, że w jednostajnym ruchu po okręgu wektor prędkości jest prostopadły do wektora przyspieszenia dośrodkowego.

Obiekt porusza się po linii prostej wzdłuż osi 0X. Zależność **położenia** od czasu przedstawia wykres:



Opisz słowami ruch ciała. Szczególnie zwróć uwagę na kierunek i zwrot prędkości, zmiany prędkości (stała, rośnie, maleje), relacje między wartościami prędkości na poszczególnych odcinkach. Czy w tym ruchu **droga przebyta** jest równa sumarycznej zmianie położenia? Narysuj wykresy pierwszej i drugiej pochodnej tej funkcji i wskaż co one obrazują.

Prędkość ciała zmienia się wg następującej zależności:

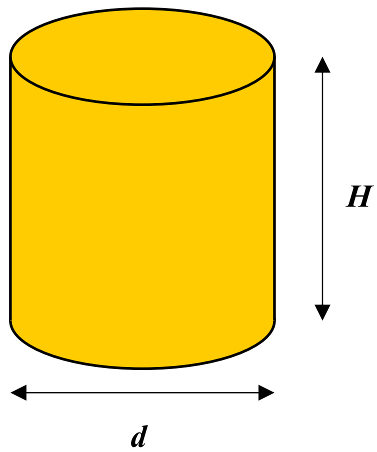
$v_x = v_x\,(t) = \mathrm{u} = \mathrm{const}$
$v_y = v_y\,(t) = at$ gdzie $a = \mathrm{const} \neq 0$

Znajdź równania ruchu tego obiektu (tzn. znajdź funkcje x(t) i y(t) opisujące wektor wodzący poruszającego się punktu). Przy obliczeniach zgadnij odpowiednie całki bądź skorzystaj z tablic całek funkcji elementarnych. Czy potrzebne są jeszcze jakieś dane do jednoznacznego rozwiązania problemu? Jeśli tak, to sam przyjmij sensowne wartości. Zapisz w jawnej postaci wektor wodzący.

Wzdłuż osi x jest przemieszczane ciało, na które działa siła $F = F_0 + kx$ (F_0 i k pewne stałe dodatnie, różne od zera; znajdź ich wymiar). Policz pracę tej siły na drodze Δx. Czy praca będzie zależała od tego, w jakim punkcie x będzie zaczynał się przedział Δx? Jaka będzie praca tej siły jeśli przemieszczenie nastąpi „tam i z powrotem”?

Policz pracę siły wyrażającej się wzorem $F = F_0 e^{-\beta x}$, gdzie β jest pewną stałą dodatnią, na drodze od $x = 0$ do $x = \infty$. Czy praca ta jest również nieskończona? Przedstaw tę siłę na wykresie $F(x)$ i podaj geometryczną interpretację policzonej pracy. Co będzie gdy stała β będzie ujemna? Co we wzorze oznacza wielkość F_0?

Znajdź sumaryczne parcie jakie wywiera piwo na ścianki boczne beczki w kształcie walca (rysunek) o wymiarach:
H = 1 m, d = 0,6 m. Przyjmij, że beczka jest wypełniona po brzegi, a gęstość piwa nieistotnie różni się od gęstości wody.
Wyobraź sobie, że beczka jest bardziej beczkowata, tzn. ścianki boczne są wybrzuszone na zewnątrz. Czy rozwiązanie zadania w takim przypadku jest znacząco trudniejsze?



Wyobraź sobie, że tuż przy dnie beczki z poprzedniego zadania jest rurka z kranikiem, przez który wylewa się piwo. Zgodnie z prawem Poiseuille’a strumień objętościowy wypływającej cieczy jest proporcjonalny do różnicy ciśnień na początku i na końcu rurki. Przyjmując, że prawo Poiseuille’a jest tu ściśle spełnione, policz czas potrzebny do opróżnienia beczki. Przyjmij i odpowiednio oznacz stałe potrzebne do obliczeń.

Andrzej Fogt