Całka Riemanna — uzupełnienia

dr Witlold Majdak, Mariusz Grządziel

Katedra Matematyki, Uniwersytet Przyrodniczy we Wrocławiu

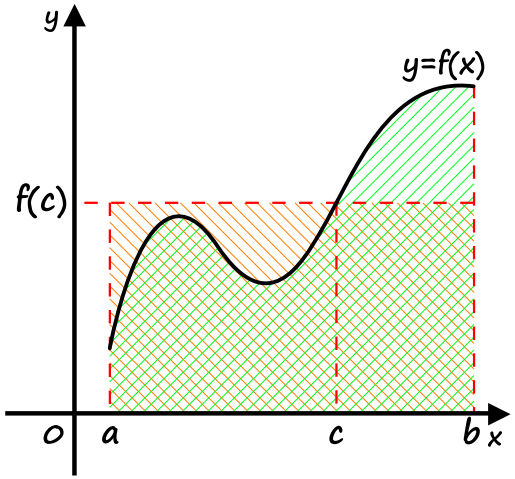
semestr zimowy; rok akademicki 2022/2023

Prezentacja oparta jest w dużej części na e-podręczniku W. Majdaka „Całka oznaczona”, publikacji AGH.

Twierdzenie o średniej całkowej funkcji I

Jeżeli $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ jest funkcją ciągłą, to istnieje element $c \in [a, b]$ o tej własności, że $f(c) = \frac{1}{b-a} \int\limits_a^b f(x)dx$.

Liczbę $f(c)$ nazywamy wówczas **średnią całkową funkcji** f w przedziale $[a, b]$.



Interpretacja geometryczna średniej całkowej funkcji

Twierdzenie o średniej całkowej funkcji II

DOWÓD Na wstępie zauważmy, że dzięki ciągłości funkcji f na mocy wartości $m = \min\limits_{x\in[a,b]} f(x)$ oraz $M = \max\limits_{x\in[a,b]} f(x)$ są skończone. Wtedy dla dowolnego $x \in [a, b]$ mamy $m \leqslant f(x) \leqslant M$. Całkując te nierówności w granicach od a do b, otrzymujemy $m(b-a) = \int\limits_a^b m dx \leqslant \int\limits_a^b f(x)dx \leqslant \int\limits_a^b M dx = M(b-a)$, a zatem po przekształceniach $m \leqslant \overbrace{\frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(x)dx}^{y_0} \leqslant M$.

Ponieważ funkcja ciągła w przedziale $[a, b]$, więc z twierdzenia Darboux (Bolzano) wynika, że dla każdej wartości $y \in [m, M]$ istnieje taki argument $x \in [a, b]$, że $y = f(x)$. W szczególności dla zdefiniowanego powyżej elementu y_0 można znaleźć taki argument $c \in [a, b]$, że $y_0 = f(c)$, co oznacza, że $f(c) = \frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(x)dx$.

Całkowanie przez podstawianie całek oznaczonych

Twierdzenie 1

Jeżeli $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *jest funkcją ciągłą, natomiast* $\varphi : [\alpha, \beta] \to [a, b]$ *jest funkcją, która ma ciągłą pochodną na* $[a, b]$ *taką, że* $\varphi(\alpha) = a$ *oraz* $\varphi(\beta) = b$*, to zachodzi równość*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

Całce z funkcji parzystej w przedziale symetrycznym względem zera I

Jeżeli a jest liczbą dodatnią, natomiast $f : [-a, a] \to \mathbb{R}$ jest parzystą funkcją ciągłą, to $\int\limits_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int\limits_{0}^{a} f(x)dx$.

DOWÓD $\int\limits_{-a}^{a} f(x)dx = \int\limits_{-a}^{0} f(x)dx + \int\limits_{0}^{a} f(x)dx$. Dokonując w pierwszej z całek występujących w powyższej sumie podstawienia $t = -x$ i stosownej zmiany granic całkowania

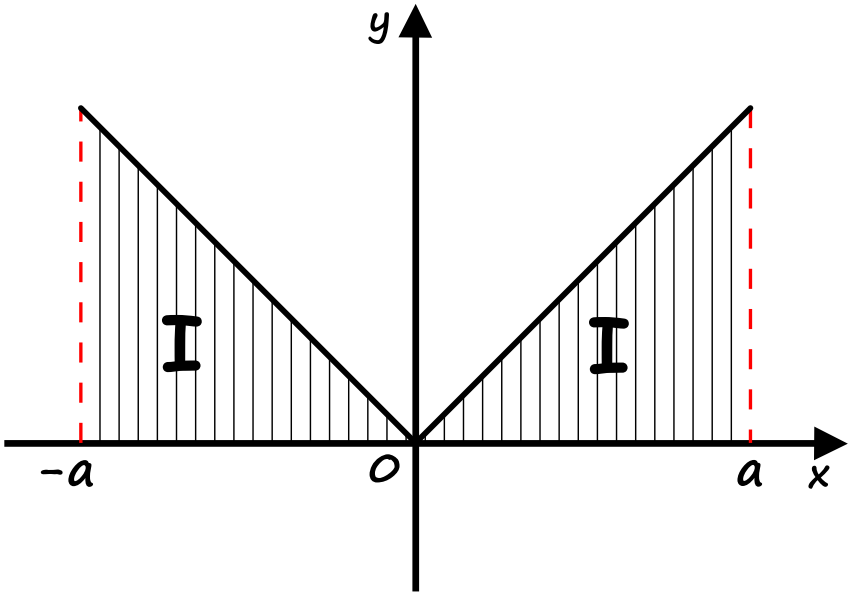
$$\left| \begin{array}{c|c|c} x & -a & 0 \\ t = -x & a & 0 \end{array} \right|$$

Całce z funkcji parzystej w przedziale symetrycznym względem zera II

otrzymujemy

$$-\int_a^0 f(-t)dt + \int_0^a f(x)dx = \int_0^a f(-t)dt + \int_0^a f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx.$$

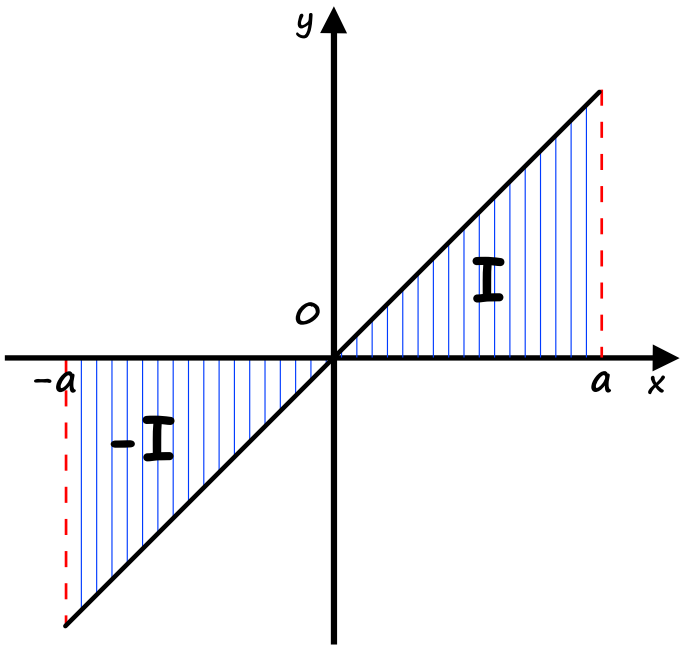
Ostatnia równość wynika z faktu, że f jest funkcją parzystą oraz zamiany symbolu zmiennej całkowania z t na x.



Całce z funkcji nieparzystej w przedziale symetrycznym względem zera I

Twierdzenie 2

Jeżeli a jest liczbą dodatnią, natomiast $f : [-a, a] \to \mathbb{R}$ jest nieparzystą funkcją ciągłą, to $\int\limits_{-a}^{a} f(x)dx = 0$.



Całce z funkcji nieparzystej w przedziale symetrycznym względem zera II

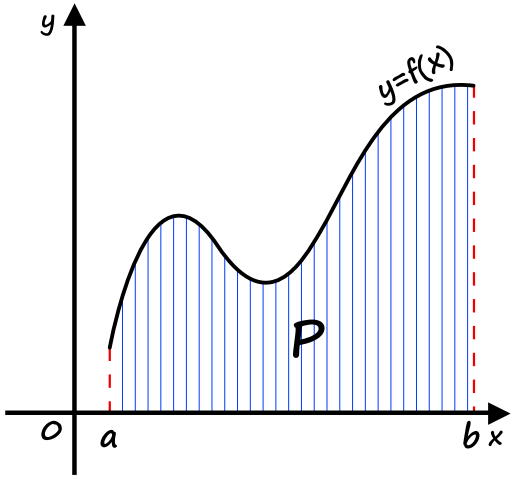
Przykład 1

Z twierdzenia wynika, że $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^7 x \, dx = 0.$

Obliczanie pól figur płaskich

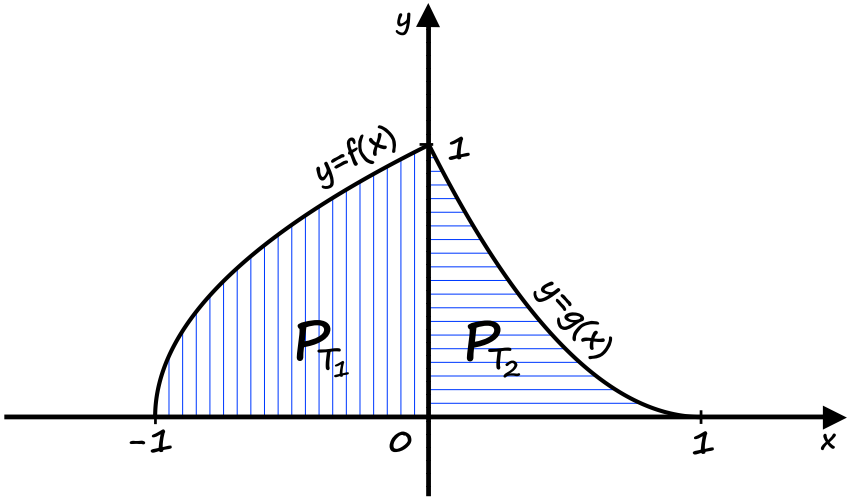
Z definicji całki oznaczonej Riemanna wynika, że jeżeli $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ jest funkcją ciągłą i nieujemną w przedziale $[a, b]$, to całka $\int_a^b f(x)dx$ jest równa polu P figury ograniczonej przez wykres funkcji f, oś OX oraz proste $x = a$ i $x = b$. Tak zadaną figurę, którą możemy opisać jako zbiór $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leqslant y \leqslant f(x),\ a \leqslant x \leqslant b\}$, nazywamy **trapezem krzywoliniowym**. Jeżeli $f(x) \leqslant 0$ dla $x \in [a, b]$, to

$$\int_a^b f(x)dx = -P.$$



Przykład I

Obliczmy pole P obszaru zawartego pomiędzy wykresami funkcji $f(x) = \sqrt{x+1}$, $g(x) = (x-1)^2$, gdzie $x \in [-1, 1]$, oraz osią OX. Zauważmy, że rozpatrywana figura jest sumą dwóch trapezów krzywoliniowych T_1 i T_2:
$T_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leqslant y \leqslant \sqrt{x+1},\ x \in [-1, 0]\}$, $\quad T_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leqslant y \leqslant (x-1)^2,\ x \in [0, 1]\}$, więc jej pole P jest równe sumie $P_{T_1} + P_{T_2}$ pól tych trapezów.



Przykład II

$$P_{T_1} = \int_{-1}^{0} \sqrt{x+1}dx = \frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}\Big|_{-1}^{0} = \frac{2}{3}, \tag{1}$$

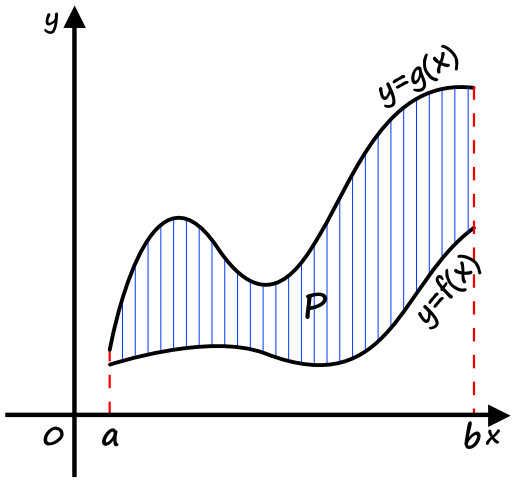
$$P_{T_2} = \int_{0}^{1} (x-1)^2 dx = \frac{1}{3}(x-1)^3\Big|_{0}^{1} = \frac{1}{3}. \tag{2}$$

Szukane pole wynosi zatem $P = \frac{2}{3} + \frac{1}{3} = 1$.

Pole figury ograniczonej przez wykresy dwóch funkcji oraz proste pionowe

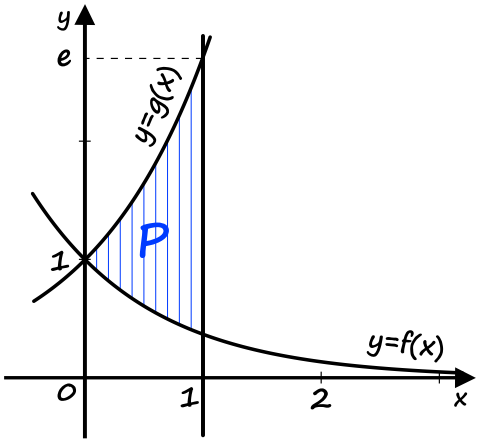
Jeżeli $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ oraz $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ są funkcjami ciągłymi, a ponadto $f(x) \leqslant g(x)$ dla każdego $x \in [a, b]$, to pole P figury ograniczonej przez wykresy tych funkcji oraz proste $x = a$ i $x = b$ wyraża się wzorem

$$P = \int_a^b (g(x) - f(x))dx.$$



Przykład

Znajdźmy pole figury zawartej między wykresami funkcji $f(x) = e^{-x}$ i $g(x) = e^{x}$ oraz prostą $x = 1$.



Rysunek 19: Pole P figury zawartej między wykresami funkcji f i g oraz prostą $x = 1$.

Dla każdego $x \in [0, 1]$ zachodzi nierówność $f(x) \leqslant g(x)$, więc szukane pole obliczamy w następujący sposób:

$$P = \int_0^1 (e^x - e^{-x})\, dx = (e^x + e^{-x})\Big|_0^1 = e + e^{-1} - 2.$$

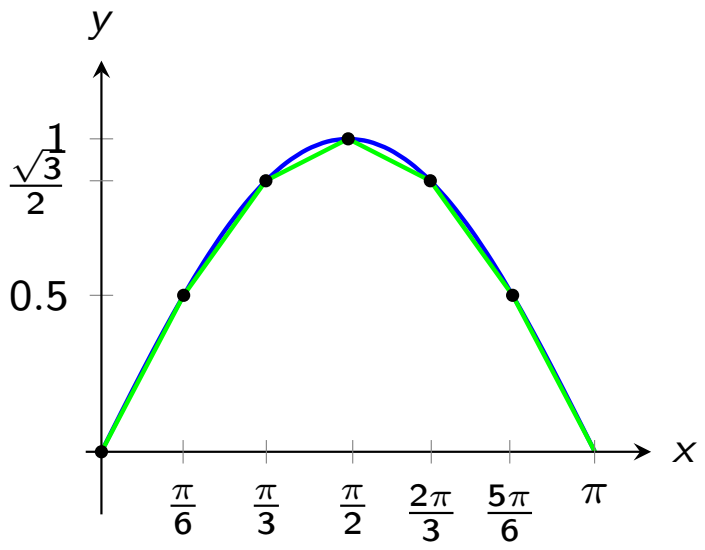
Długości krzywej będącej wykresem funkcji jednej zmiennej I

Twierdzenie 3

Długość d łuku krzywej będącej wykresem funkcji $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ mającej ciągłą pochodną na tym przedziale wyraża się wzorem

$$d = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx.$$

Długości krzywej będącej wykresem funkcji jednej zmiennej II



Szkic dowodu

Długość łuku d może być przybliżona sumą długości odcinków łączących punkty należące do łuku w taki sposób, jak to jest pokazane na rysunku; rysunek wykonano dla funkcji $f(x) = \sin x$, odcinka $[a, b] = [0, \pi]$ i podziału tego odcinka na 6 przedziałów o równej długości.

Długości krzywej będącej wykresem funkcji jednej zmiennej III

Dla podziału odcinka $[a, b]$ odpowiadającego sekwencji odcinków przybliżających łuk (zaznaczonych na rysunku na zielono)

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$$

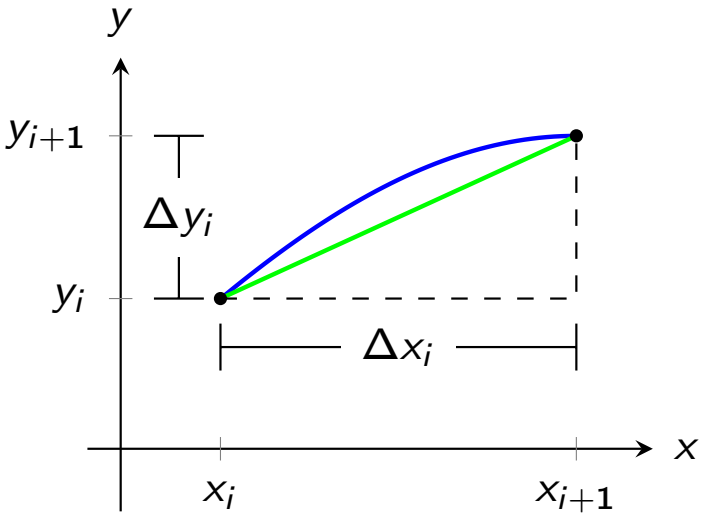
określamy $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i, i = 0, \ldots, n-1$.

Długości krzywej będącej wykresem funkcji jednej zmiennej IV

Długość i-tego odcinka należącego do łamanej aproksymującej łuk jest równa

$$\sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2} = \Delta x_i \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2},$$

gdzie $y_i = f(x_i)$, $\Delta y_i = y_{i+1} - y_i$, $i = 0, \ldots, n-1$.



Długości krzywej będącej wykresem funkcji jednej zmiennej V

Cała łamana ma długość

$$\sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2} \Delta x_i. \tag{3}$$

Można pokazać, że istnieją $c_i \in [x_i, x_{i+1}]$ takie, że

$$f'(c_i) = \frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}, \quad i = 0, \ldots, n-1.$$

Suma (3) może być zapisana w postaci

$$\sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{1 + [f'(c_i)]^2} \Delta x_i.$$

Długości krzywej będącej wykresem funkcji jednej zmiennej VI

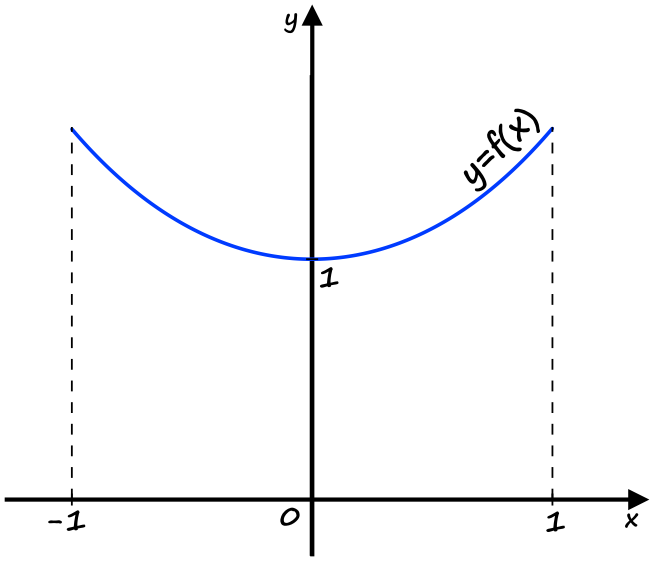
Zbiega ona do granicy d dla ciągu podziałów, który spełnia warunek: długość najdłuższego z podprzedziałów zbiega do zera.

Uwaga 1

Przyjmując $\Delta x_1 = \Delta x_2 = \ldots = \Delta x_n$ możemy wykonać obliczenia wykorzystując definicję całki jako granicy sum Riemanna obliczanych dla równomiernych podziałów, podaną na początku semestru (którą można znaleźć w książce Stewarta).

Przykład

Obliczmy długość linii łańcuchowej $f(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$, gdzie $x \in [-1, 1]$.



Rysunek : Linia łańcuchowa

Ponieważ pochodna funkcji f wyraża się wzorem $f'(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$, więc wyrażenie podpierwiastkowe ma postać
$1 + (f'(x))^2 = 1 + \frac{(e^x - e^{-x})^2}{4} = \frac{4 + e^{2x} - 2 + e^{-2x}}{4} = \frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x}}{4} = \frac{(e^x + e^{-x})^2}{4}$,
więc
$d = \int\limits_{-1}^{1} \sqrt{1 + (f'(x))^2}dx = \int\limits_{-1}^{1} \sqrt{\frac{(e^x + e^{-x})^2}{4}}dx = \int\limits_{-1}^{1} \frac{e^x + e^{-x}}{2}dx =$
$\frac{e^x - e^{-x}}{2}\Big|_{-1}^{1} = e - e^{-1}$.

Linia (krzywa) łańcuchowa

Krzywa łańcuchowa: wykres funkcji

$$y = a\cosh\left(\frac{x}{a}\right) = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right),$$

gdzie a jest ustaloną liczbą dodatnią.

Jest przeskalowanym (otrzymanym przez pomnożenie współrzędnych poziomych i pionowych przez $a > 0$) wykresem funkcji

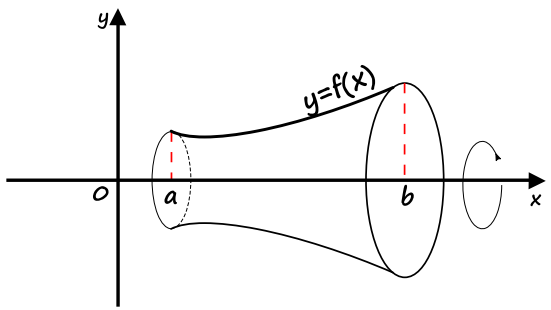
$$y = a\cosh(x) = \frac{1}{2}\left(e^{x} + e^{-x}\right),$$

por. artykuł „Krzywa łańcuchowa" w Wikipedii.

Obliczanie objętości brył obrotowych

Twierdzenie 4

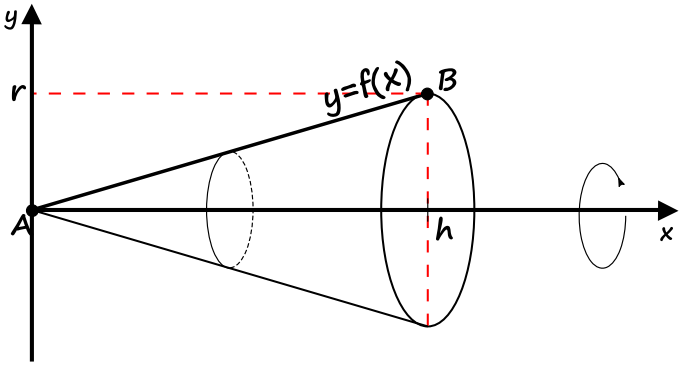
Niech krzywa Γ *będzie wykresem nieujemnej funkcji ciągłej* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. *Objętość* V *bryły powstałej z obrotu łuku krzywej* Γ *wokół osi* OX *wyraża się wzorem* $V = \pi \int\limits_a^b f^2(x)dx$.



Dowód można znaleźć na stronach 151-152 w książce S. Banacha „Rachunek różniczkowy i całkowy", t.2, link dostępny na stronie wykładu.

Objętość stożka

Obliczymy objętość stożka, którego wysokość jest równa h, a promień jego podstawy wynosi r. Zauważmy, że stożek ten powstaje z obrotu odcinka o końcach w punktach $A = (0, 0)$ i $B = (h, r)$ ($h > 0$, $r > 0$) wokół osi OX. Ogólnie odcinek łaczący punkty o współrzędnych (x_A, y_A) oraz (x_B, y_B) możemy opisać za pomocą równania $y - y_A = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}(x - x_A)$, gdzie $x \in [x_A, x_B]$. W naszej sytuacji przyjmuje ono postać $y = \frac{r}{h}x$, gdzie $x \in [0, h]$.



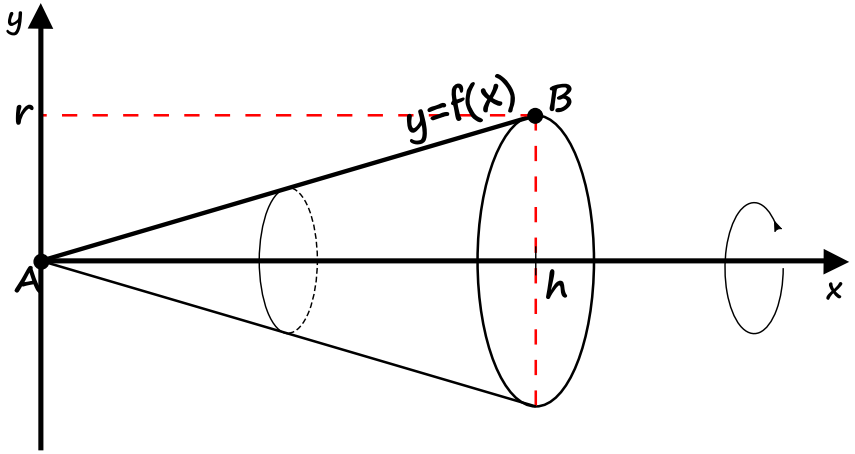
Rysunek: Stożek, którego objętość obliczamy

Szukaną objętość możemy zatem obliczyć w następujący sposób:

$$V = \pi \int_0^h \left(\frac{r}{h}x\right)^2 dx = \frac{r^2}{h^2}\pi \int_0^h x^2 dx = \frac{r^2}{h^2}\pi \frac{1}{3}x^3\Big|_0^h = \frac{1}{3}\pi r^2 h.$$

Objętość stożka

Obliczymy objętość stożka, którego wysokość jest równa h, a promień jego podstawy wynosi r. Zauważmy, że stożek ten powstaje z obrotu odcinka o końcach w punktach $A = (0, 0)$ i $B = (h, r)$ ($h > 0$, $r > 0$) wokół osi OX. Ogólnie odcinek łaczący punkty o współrzędnych (x_A, y_A) oraz (x_B, y_B) możemy opisać za pomocą równania $y - y_A = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}(x - x_A)$, gdzie $x \in [x_A, x_B]$.
W naszej sytuacji: $y = \frac{r}{h}x$, gdzie $x \in [0, h]$.



Szukana objętość:

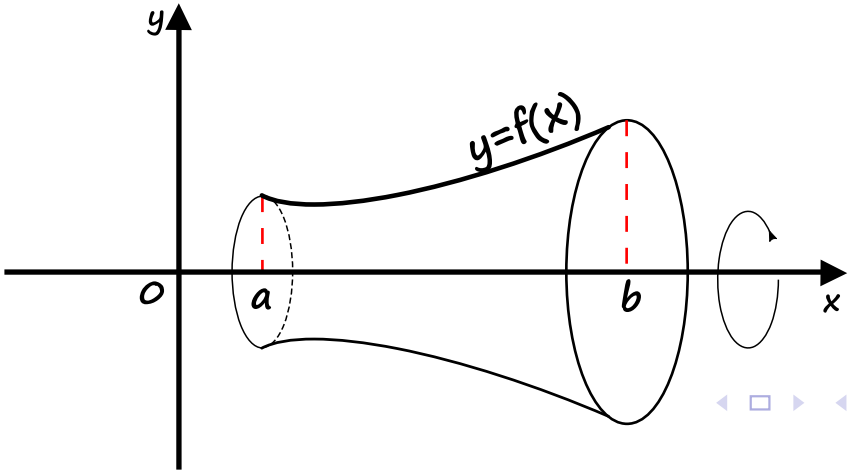
$$V = \pi \int_0^h \left(\frac{r}{h}x\right)^2 dx = \frac{r^2}{h^2}\pi \int_0^h x^2 dx = \frac{r^2}{h^2}\pi \frac{1}{3}x^3\Big|_0^h = \frac{1}{3}\pi r^2 h.$$

Twierdzenie o polu powierzchni obrotowej powstałej przez obrót wykresu funkcji jednej zmiennej wokół osi OX

Twierdzenie 5

Niech krzywa Γ *będzie wykresem nieujemnej funkcji* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, *której pochodna jest ciągła na na przedziale* $[a, b]$. *Pole* S *powierzchni obrotowej bryły powstałej z obrotu krzywej* Γ *wokół osi* OX *wyraża się wzorem*

$$S = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}dx.$$



Powierzchnię kuli o promieniu $r > 0$

Należy obliczyć powierzchnię A bryły otrzymanej w wyniku obrotu wykresu funkcji f danej wzorem

$$f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}, \quad -r \leqslant x \leqslant r.$$

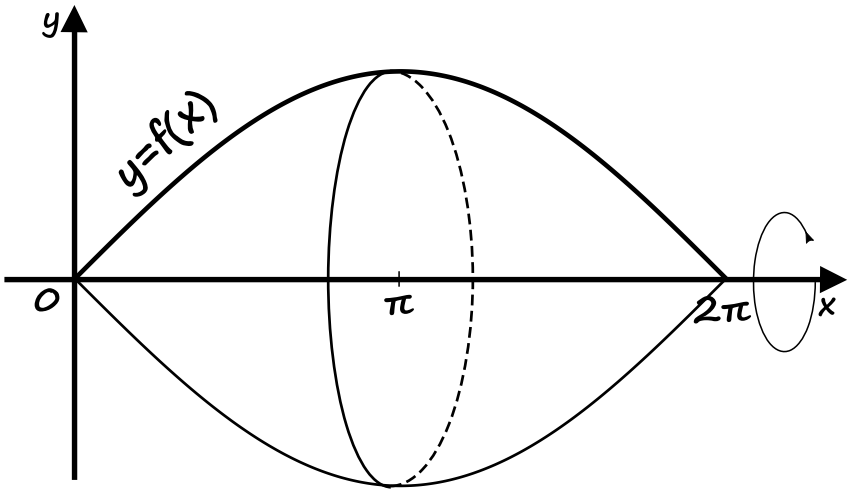
Mamy

$$f'(x) = -\frac{x}{r^2 - x^2},$$

więc

$$\begin{aligned} A =& 2\pi \int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}\sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2}} = \\ =& 2\pi \int_{-r}^{r} r dx = 4r^2\pi. \end{aligned}$$

Pole powierzchni obrotowej powstałej przez obrót łuku sinusoidy $y = \sin x$, gdzie $x \in [0, \pi]$, wokół osi OX. I



Pole S interesującej nas powierzchni obliczamy korzystając z Twierdzenia 5:

$$S = 2\pi \int_0^{\pi} \sin x \sqrt{1 + (\cos x)^2}\, dx.$$

W celu obliczenia tej całki wprowadzimy nową zmienną $t = \cos x$.

Pole powierzchni obrotowej — c.d.

Wtedy $dt = -\sin x\, dx$, a ponieważ funkcja cosinus jest malejąca na przedziale $[0, \pi]$, więc parametr t zmienia się od 1 do -1. W rezultacie $S = -2\pi \int\limits_{1}^{-1} \sqrt{1+t^2}dt = 2\pi \int\limits_{-1}^{1} \sqrt{1+t^2}dt$.

Pole powierzchni obrotowej — c.d.

Całkę nieoznaczoną $\int \sqrt{1+t^2}\,dt = \int \frac{1+t^2}{\sqrt{1+t^2}}\,dt$ obliczamy stosując „metodę współczynników nieoznaczonych"
$\int \frac{1+t^2}{\sqrt{1+t^2}}\,dt = (at+b)\sqrt{1+t^2} + k\int \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\,dt.$
Różniczkując obie strony równania, otrzymujemy
$\frac{1+t^2}{\sqrt{1+t^2}} = a\sqrt{1+t^2} + (at+b)\frac{t}{\sqrt{1+t^2}} + k\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$, a po pomnożeniu obu stron równania przez $\sqrt{1+t^2}$ dostajemy równanie wielomianowe
$1+t^2 = a(1+t^2) + (at+b)t + k,$
którego rozwiązaniem są liczby $a = \frac{1}{2}$, $b = 0$ i $k = \frac{1}{2}$. W konsekwencji
$\int \sqrt{1+t^2}\,dt = \frac{1}{2}t\sqrt{1+t^2} + \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\,dt =$
$\frac{1}{2}t\sqrt{1+t^2} + \frac{1}{2}\ln\left|t+\sqrt{1+t^2}\right| + C, \quad C \in \mathbb{R}.$
Ostatnia równość wynika z wzoru:

$$\int \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} = \operatorname{arsinh} t + C = \ln(t+\sqrt{1+t^2}) + C,$$

por. artykuł Wikipedii „Funkcje hiperboliczne odwrotne". O metodzie współczynników nieoznaczonych można przeczytać w książce F. Lei „Rachunek różniczkowy i całkowy", wyd. XVII, str. 269 lub w rozdziale „Metoda współczynników nieoznaczonych" w e-podręczniku „Całka nieoznaczona" K. Noska i T. Drwięgi.

Mamy $S = 2\pi\left(\frac{1}{2}t\sqrt{1+t^2} + \frac{1}{2}\ln\left|t+\sqrt{1+t^2}|\right)\right|_{-1}^{1} =$
$2\pi\left(\frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}\ln\left|1+\sqrt{2}\right| + \frac{1}{2}\sqrt{2} - \frac{1}{2}\ln\left|-1+\sqrt{2}\right|\right)$, więc szukane pole jest równe $S = 2\pi(\sqrt{2} + \frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}) = 2\pi(\sqrt{2} + \ln(\sqrt{2}+1))$.

Metoda współczynników nieoznaczonych

Metoda całkowania funkcji postaci

$$f(x) = \frac{W_n(x)}{\sqrt{ax^2 + bx + c}},$$

gdzie W_n - wielomian stopnia n-tego:

- przedstawić całkę funkcji f w postaci

$$\int \frac{W_n(x)}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx =$$
$$= W_{n-1}(x)\sqrt{ax^2 + bx + c} + A \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}},$$

  gdzie W_{n-1} jest wielomianem stopnia $n - 1$, A jest nieznaną stała.
- współczynniki wielomianu W_{n-1} i stałą A wyznaczyć różniczkując obustronnie powyższą równość.

Inne metody obliczania całek funkcji postaci $R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c})$: książka F. Lei, str. 266–267.

Literatura

F. Leja, Rachunek różniczkowy i całkowy, PWN, wyd. XVII.

W. Majdak, Całka oznaczona funkcji jednej zmiennej rzeczywistej, AGH, Kraków 2022, e-podręcznik dostępny na stronie https://epodreczniki.open.agh.edu.pl

K. Nosek i T. Drwięga, Całka nieoznaczona, AGH, Kraków 2022, e-podręcznik dostępny na stronie https://epodreczniki.open.agh.edu.pl

M. Zakrzewski, Markowe wykłady z matematyki— analiza, GiS, Wrocław 2013.