

Całka niewłaściwa Riemanna

dr Witold Majdak, Mariusz Grządziel

Katedra Matematyki, Uniwersytet Przyrodniczy we Wrocławiu

semestr zimowy; rok akademicki 2022/2023

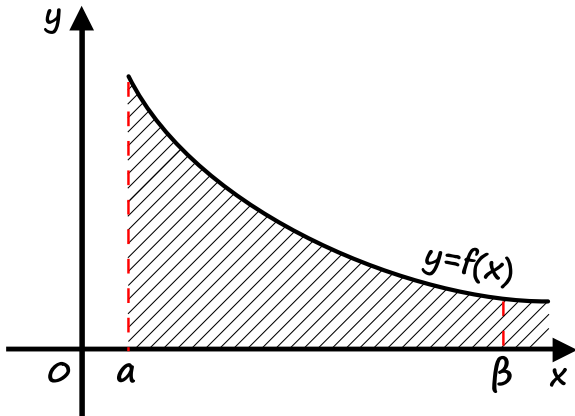
Prezentacja oparta jest w dużej części na e-podręczniku W. Majdaka „Całka oznaczona”, publikacji AGH.

Całką niewłaściwą Riemanna I rodzaju

Definicja 1

Niech $f : [a, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją całkowalną w sensie Riemmana na każdym z przedziałów domkniętych $[a, \beta]$, gdzie $a < \beta$. **Całką niewłaściwą Riemanna I rodzaju** funkcji f na przedziale $[a, b]$ nazywamy granicę $\lim_{\beta \rightarrow +\infty} \int_a^{\beta} f(x) dx$ i oznaczamy ją symbolem $\int_a^{+\infty} f(x) dx$.

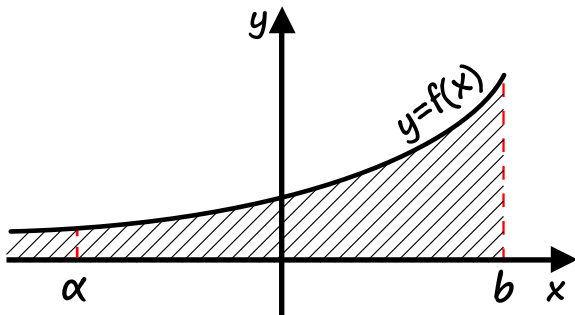
Jeżeli powyższa granica istnieje i jest skończona, to mówimy, że całka niewłaściwa $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ jest **zbieżna**, natomiast jeżeli granica ta nie istnieje lub jest niewłaściwa, to mówimy, że całka niewłaściwa $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ jest **rozbieżna**.



Rysunek: Interpretacja geometryczna całki niewłaściwej Riemanna I rodzaju na przedziale $[a, +\infty)$

W analogiczny sposób definiuje się całkę niewłaściwą Riemanna I rodzaju $\int_{-\infty}^b f(x)dx$ funkcji f określonej na przedziale $(-\infty, b]$, jak również pojęcia jej zbieżności i rozbieżności. Przyjmujemy wówczas, że

$$\int_{-\infty}^b f(x)dx := \lim_{\alpha \rightarrow -\infty} \int_{\alpha}^b f(x)dx.$$



Rysunek: Interpretacja geometryczna całki niewłaściwej Riemanna I rodzaju na przedziale $(-\infty, b]$

Przykład 1

Przy ustalonej liczbie $a > 0$ zbadajmy zbieżność całki $\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx$ w zależności od wartości parametru $p \in \mathbb{R}$.

Przypadek 1. $p \neq 1$.

$$\begin{aligned}\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^p} &= \int_a^{+\infty} x^{-p} dx = \lim_{\beta \rightarrow +\infty} \int_a^{\beta} x^{-p} dx = \lim_{\beta \rightarrow +\infty} \left[\frac{x^{-p+1}}{-p+1} \right]_a^{\beta} \\ &= \lim_{\beta \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{(1-p)x^{p-1}} \right]_a^{\beta} = \frac{1}{1-p} \lim_{\beta \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{\beta^{p-1}} - \frac{1}{a^{p-1}} \right).\end{aligned}$$

Zauważmy, że $\lim_{\beta \rightarrow +\infty} \frac{1}{\beta^{p-1}} = \begin{cases} +\infty, & \text{gdy } p-1 < 0, \\ 0, & \text{gdy } p-1 > 0, \end{cases}$

a zatem $\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^p} = \begin{cases} +\infty, & \text{gdy } p < 1, \\ \frac{1}{(p-1)a^{p-1}}, & \text{gdy } p > 1. \end{cases}$

Przypadek 2. $p = 1$.

$$\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{\beta \rightarrow +\infty} \left[\ln x \right]_a^{\beta} = \lim_{\beta \rightarrow +\infty} (\ln \beta - \ln a) = +\infty.$$

Definicja 2

Niech $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją całkowlaną w sensie Riemanna w każdym przedziale domkniętym $[\alpha, \beta]$ zawartym w $\mathbb{R}$. **Całkę niewłaściwą Riemanna I rodzaju** funkcji f w $\mathbb{R}$ definiujemy jako

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx := \int_{-\infty}^a f(x)dx + \int_a^{+\infty} f(x)dx,$$

gdzie a jest dowolnie wybranym punktem z $\mathbb{R}$. Jeżeli obie całki w powyższej sumie są zbieżne, to mówimy, że całka $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ jest zbieżna. Gdy któraś z tych całek nie istnieje lub jest rozbieżna, to mówimy, że całka $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ jest rozbieżna.

Należy podkreślić, że jeżeli całka $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ jest zbieżna, to można wykazać, że jej wartość nie zależy od wyboru punktu $a \in \mathbb{R}$ w powyższej definicji.

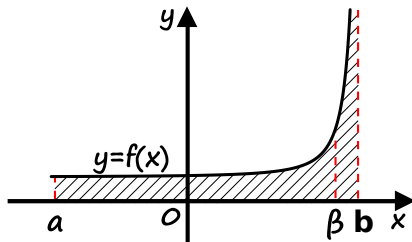
Niewłaściwość całki ze względu na funkcję podcałkową (całka II rodzaju)

Definicja 3

Niech $(f : [a, b) \rightarrow \mathbb{R})$ będzie funkcją całkowaną w sensie Riemanna na każdym z przedziałów domkniętych $[a, \beta]$, przy czym $(a < \beta < b)$. Załóżmy, że funkcja (f) jest nieograniczona w pewnym lewostronnym sąsiedztwie punktu (b) . **Całką niewłaściwą**

Riemanna II rodzaju funkcji (f) nazywamy granicę $\lim_{\beta \rightarrow b^-} \int_a^\beta f(x) dx$ i oznaczamy ją symbolem $\int_a^b f(x) dx$.

Jeżeli powyższa granica istnieje i jest skończona, to mówimy, że całka niewłaściwa $\int_a^b f(x) dx$ jest **zbieżna**, natomiast jeżeli granica ta nie istnieje lub jest niewłaściwa, to mówimy, że całka niewłaściwa $\int_a^b f(x) dx$ jest **rozbieżna**.

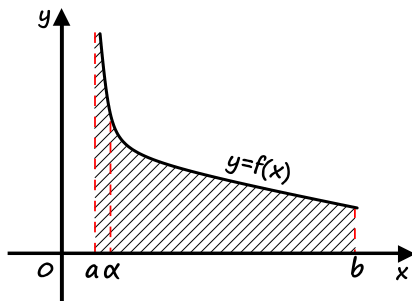


Rysunek: Interpretacja geometryczna całki niewłaściwej Riemanna II rodzaju w przedziale $[a, b)$

W analogiczny sposób definiujemy całkę niewłaściwą Riemanna II rodzaju w przypadku, gdy funkcja $f : (a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ jest całkowna w sensie Riemmana na każdym z przedziałów domkniętych $[\alpha, b]$, przy czym $a < \alpha < b$, oraz jest nieograniczona w prawostronnym sąsiedztwie punktu a . Wówczas przyjmujemy, że

$$\int_a^b f(x) dx := \lim_{\alpha \rightarrow a^+} \int_{\alpha}^b f(x) dx.$$

W tej sytuacji analogicznie jak wyżej definiuje się pojęcia zbieżności i rozbieżności całki niewłaściwej.



Rysunek: Interpretacja geometryczna całki niewłaściwej Riemanna II rodzaju w przedziale $(a, b]$

Niech $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją całkowalną w sensie Riemanna na każdym z przedziałów domkniętych $[\alpha, \beta]$, przy czym $a < \alpha < \beta < b$. Załóżmy, że funkcja f jest nieograniczona w pewnym prawostronnym sąsiedztwie punktu a oraz w pewnym lewostronnym sąsiedztwie punktu b . **Całkę niewłaściwą Riemanna II rodzaju** funkcji f w (a, b) definiujemy jako

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx,$$

gdzie c jest dowolnie wybranym punktem z (a, b) . Jeżeli obie całki po prawej stronie powyższej równości są zbieżne, to mówimy, że całka $\int_a^b f(x) dx$ jest **zbieżna**. Gdy któraś z tych całek nie istnieje lub jest rozbieżna, to mówimy, że całka niewłaściwa $\int_a^b f(x) dx$ jest **rozbieżna**.

Przykład

Obliczmy całkę $\int_0^1 \frac{dx}{(x-1)^2}$. Zauważmy, że $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{(x-1)^2} = +\infty$, a zatem funkcja podcałkowa jest nieograniczona w lewostronnym sąsiedztwie punktu 1. Na początku znajdziemy następującą całkę nieoznaczoną:

$$\int \frac{dx}{(x-1)^2} = \left| \begin{array}{l} t = x - 1 \\ dt = dx \end{array} \right| = \int \frac{1}{t^2} dt = -\frac{1}{t} + C = -\frac{1}{x-1} + C.$$

Otrzymujemy zatem

$$\int_0^1 \frac{dx}{(x-1)^2} = \lim_{\beta \rightarrow 1^-} \int_0^\beta \frac{dx}{(x-1)^2} = \quad (1)$$

$$= \lim_{\beta \rightarrow 1^-} \left(-\frac{1}{x-1} \right) \Big|_0^\beta = \lim_{\beta \rightarrow 1^-} \left(\frac{-1}{\beta-1} - 1 \right) = +\infty, \quad (2)$$

a więc rozpatrywana całka niewłaściwa jest rozbieżna.

Przy ustalonej liczbie $b > 0$ zbadajmy zbieżność całki $\int_0^b \frac{1}{x^p} dx$ w zależności od wartości parametru $p \in \mathbb{R}$.

Przypadek 1. $p \neq 1$.

$$\begin{aligned}\int_0^b \frac{dx}{x^p} &= \int_0^b x^{-p} dx = \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \int_{\alpha}^b x^{-p} dx = \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \frac{x^{-p+1}}{-p+1} \Big|_{\alpha}^b \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \frac{1}{(1-p)x^{p-1}} \Big|_{\alpha}^b = \frac{1}{1-p} \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{b^{p-1}} - \frac{1}{\alpha^{p-1}} \right).\end{aligned}$$

Zauważmy, że $\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \frac{1}{\alpha^{p-1}} = \begin{cases} 0, & \text{gdy } p-1 < 0, \\ +\infty, & \text{gdy } p-1 > 0, \end{cases}$

a zatem $\int_0^b \frac{dx}{x^p} = \begin{cases} \frac{b^{1-p}}{p-1}, & \text{gdy } p < 1, \\ +\infty, & \text{gdy } p > 1. \end{cases}$

Przypadek 2. $p = 1$.

$$\int_0^b \frac{dx}{x} = \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \int_{\alpha}^b \frac{dx}{x} = \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \ln x \Big|_{\alpha}^b = \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} (\ln b - \ln \alpha) = +\infty.$$

Reasumując, całka $\int_0^b \frac{dx}{x^p}$ jest zbieżna dla $p < 1$, a rozbieżna dla $p \geq 1$.

Twierdzenie 1

Niech $f : [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ oraz $g : [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ będą funkcjami ciągłymi; b oznacza tu liczbę rzeczywistą lub ∞ . Załóżmy, że $0 \leq f(x) \leq g(x)$ dla każdego $x \in [a, b)$. Wówczas:

1) jeżeli całka $\int_a^b g(x)dx$ jest zbieżna, to całka $\int_a^b f(x)dx$ jest również zbieżna,

2) jeżeli całka $\int_a^b f(x)dx$ jest rozbieżna, to całka $\int_a^b g(x)dx$ jest również rozbieżna.

Przykład 1

Całka $\int_0^1 t^{x-1} e^{-t} dt$ jest zbieżna dla $x \in (0, 1)$. Wynika to z nierówności

$$t^{x-1} e^{-t} \leq t^{x-1} \quad \text{dla } x \in (0, 1) \quad \text{i } t \in (0, 1].$$

Przykład 2

Całka

$$\int_1^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$$

jest zbieżna dla dowolnego $x > 0$. Wynika to stąd, że

$$t^{x-1} e^{-t} = \frac{t^{x+1}}{e^t} \cdot \frac{1}{t^2}$$

oraz

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t^{x+1}}{e^t} = 0; \quad (3)$$

zauważmy, że z (3) wynika, że istnieje $a > 0$ takie, że dla $t > a$ zachodzi $t^{x-1} e^{-t} < 1/t^2$ i

$$\int_a^{\infty} \frac{1}{t^2} dt = \frac{1}{a}.$$

Dowód Faktu (3) można znaleźć np. w książce K. Kuratowskiego *Rachunek różniczkowy i całkowy*, rozdz. 4.6.

Funkcja gamma

Definicja 4

Funkcja Γ określona jest wzorem

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt, \quad x > 0.$$

Uwaga 1

Dla $x > 0$ wartość $\Gamma(x)$ jest sumą dwóch zbieżnych całek niewłaściwych, por. przykłady 1 i 2.

Fakt 1

$$\Gamma(1) = 1.$$

Fakt 2

Dla $x > 1$

$$\Gamma(x) = (x-1)\Gamma(x-1).$$

Dowód

$$\int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt \left| \begin{array}{l} u(t) = t^{x-1} \\ u'(t) = (x-1)t^{x-2} \end{array} \right. \left. \begin{array}{l} v'(t) = e^{-t} \\ v(t) = -e^{-t} \end{array} \right| = \quad (4)$$

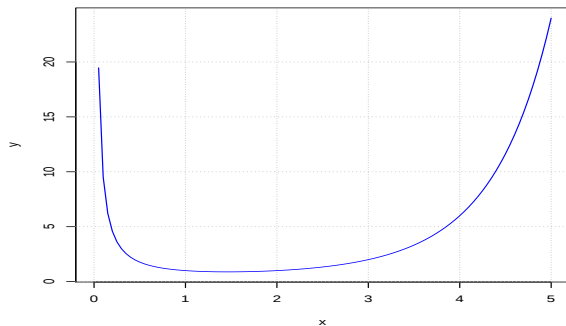
$$= \left[-t^{x-1} e^{-t} \right]_0^{\infty} + \int_0^{\infty} (x-1)t^{x-2} e^{-t} dt = (x-1)\Gamma(x-1). \quad (5)$$

$\left[-t^{x-1} e^{-t} \right]_0^{\infty}$ oznacza

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \left[-t^{x-1} e^{-t} \right]_0^T$$

Fakt 3

Dla n naturalnego $\Gamma(n) = (n-1)!$.



Rysunek: Wykres funkcji Γ

Fakt 4

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

Fakt 5

Dla $\lambda > 0$ i $x > 0$

$$\int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-\lambda t} dt = \frac{\Gamma(x)}{\lambda^x}$$

Problem 1

Wyznaczyć wartość $\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)$.

Problem 2

Wyznaczyć wartość całki

$$\int_0^{\infty} x^6 e^{-4x} dx.$$

Literatura

W. Majdak, Całka oznaczona funkcji jednej zmiennej rzeczywistej, AGH, Kraków 2014, e-podręcznik dostępny na stronie <https://epodreczniki.open.agh.edu.pl>

M. Zakrzewski, Markowe wykłady z matematyki— analiza, GiS, Wrocław 2013.