

Całki wielokrotne

dr Mariusz Grządziel

Katedra Matematyki, Uniwersytet Przyrodniczy we Wrocławiu

semestr zimowy; rok akademicki 2022/2023

Wiele przykładów rachunkowych i rysunków pochodzi z książek:

G. Hartman i inni, APEX Calculus,

<http://www.apexcalculus.com/downloads>

Książka ta jest udostępniona na licencji Creative Commons 4.0 BY NC

i

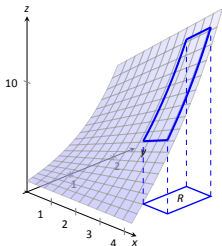
G. Strang i inni, OpenStax Calculus,

<http://openstax.org>

Książka ta jest udostępniona na licencji Creative Commons 4.0 BY NC SA

Ta prezentacja również jest udostępniona na warunkach tej licencji.

Motywacja geometryczna



Rysunek 1: Prostopadłościan krzywopowierzchniowy

Problem: obliczyć objętość figury ograniczonej z dołu prostokątem o bokach równoległych do osi OX i OY , z wykresem funkcji ciągłej $f(x, y)$ i odpowiednimi płaszczyznami, prostopadłymi do płaszczyzny OXY , zawierającymi boki prostokąta, por. rys. 1.

Sumy Riemanna

Niech

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d.\} \quad (1)$$

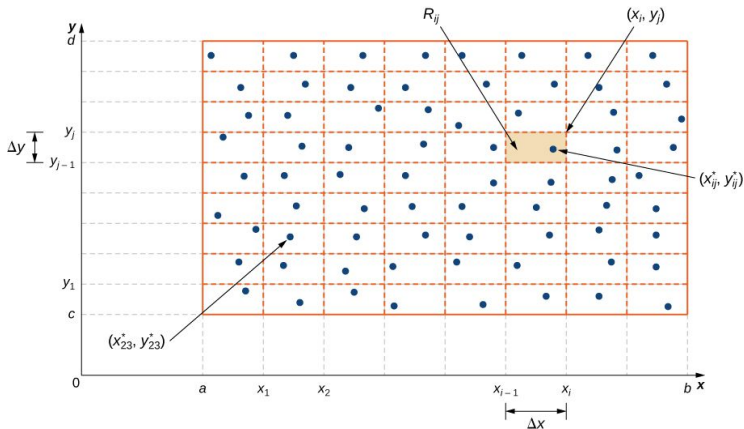
Niech $f(x, y)$ będzie nieujemną funkcją ciągłą. Załóżmy, że R jest zawarty w dziedzinie funkcji f . Podzielmy odcinek R na mn prostokątów, których boki mają długość

$$\Delta x = \frac{b-a}{m}, \quad \Delta y = \frac{d-c}{n}.$$

Oznaczmy je: $R_{ij}, i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n$. Niech x_{ij}^* będzie dowolnie wybranym punktem prostokąta R_{ij} . Pole każdego z prostokątów, równe $\Delta x \Delta y$ oznaczmy przez ΔP . Suma

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(x_{ij}^*) \Delta P$$

wyznacza przybliżoną wartość objętości figury pomiędzy wykresem funkcji f i płaszczyzną poziomą.



Rysunek 2: Suma Riemanna — sposób konstrukcji; źródło: OpenStax Calculus t. 3 [OSC3]

Objętość V rozważanej figury jest równa

$$V = \lim_{i,j \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(x_{ij}^*) \Delta P,$$

gdzie $f(x_{ij}^*)$ i ΔP zależą od m i n , por. [OSC3, s. 480].

Definicja 1

Całkę podwójną z funkcji f na prostokącie R definiujemy wzorem

$$\iint_R f(x, y) dP = \lim_{i,j \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(x_{ij}^*) \Delta P, \quad (2)$$

Zakładamy, że granica po prawej stronie równości w (2) jest właściwa i nie zależy od sposobu wyboru punktów pośrednich. Mówimy wtedy, że funkcja f jest całkowalna na prostokącie R .

Jeżeli funkcja f jest nieujemna i całkowalna, powyższa całka jest równa objętości figury pod wykresem f i nad prostokątem R . Jeżeli f jest całkowalna i zmienia znak, całkę można interpretować jako znakowaną objętość figury między wykresem f i prostokątem R . Całkę podwójną z funkcji f po prostokącie R oznaczamy też symbolem

$$\iint_R f(x, y) dx dy.$$

Przedziałem domkniętym w $\mathbb{R}^2$ będziemy nazywać prostokąt

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}, \quad (3)$$

gdzie a, b, c i d są liczbami rzeczywistymi spełniającymi warunki $a < b$ i $c < d$.

Twierdzenie 1

Funkcja $f(x, y)$ określona i ograniczona na przedziale domkniętym $R \subset \mathbb{R}^2$ jest całkowalna na tym przedziale, jeśli spełnia jeden z następujących warunków:

- 1. f jest ciągła na przedziale R ;*
- 2. punkty nieciągłości funkcji f leżą na krzywej $K \subset R$ określonej równaniem $y = g(x)$, gdzie g jest funkcją ciągłą w pewnym przedziale domkniętym $[a_1, b_1] \subset [a, b]$;*
- 3. punkty nieciągłości funkcji f leżą na krzywej $L \subset R$ określonej równaniem $x = h(y)$, gdzie h jest funkcją ciągłą w pewnym przedziale domkniętym $[c_1, d_1] \subset [c, d]$;*
- 4. punkty nieciągłości f leżą w zbiorze będącym sumą skończonej ilości krzywych określonych w punktach 2 i 3.*

Twierdzenie 2

Niech funkcje f i g będą całkowalne na prostokącie R i niech $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Wtedy

$$\iint_R (\alpha f(x, y) + \beta g(x, y)) dP = \alpha \iint_R (f(x, y)) dP + \beta \iint_R (g(x, y)) dP.$$

Twierdzenie 3

Jeżeli funkcja f jest całkowalna na przedziale domkniętym (prostokącie domkniętym) $R \subset \mathbb{R}^2$, to dla dowolnego podziału tego przedziału na przedziały domknięte R_1 i R_2 o rozłącznych wnętrzach prawdziwa jest równość

$$\iint_R f(x, y) dP = \iint_{R_1} f(x, y) dP + \iint_{R_2} f(x, y) dP.$$

Będziemy wykorzystywać twierdzenie Fubiniego dla funkcji ciągłej na prostokącie:

Twierdzenie 4

Jeżeli funkcja f jest ciągła na prostokącie domkniętym R

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}, \quad (4)$$

gdzie $a < b$ i $c < d$, to

$$\iint_R f(x, y) dP = \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y) dy \right] dx = \int_c^d \left[\int_a^b f(x, y) dx \right] dy. \quad (5)$$

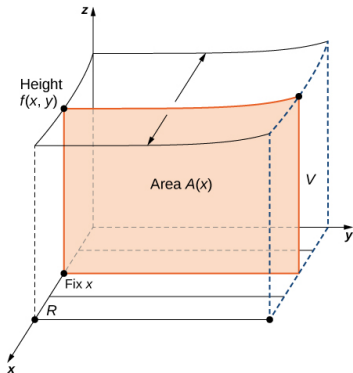
Całki po prawej stronie równości (5) — całki iterowane.

Konwencja notacyjna. Czasami będziemy pisać

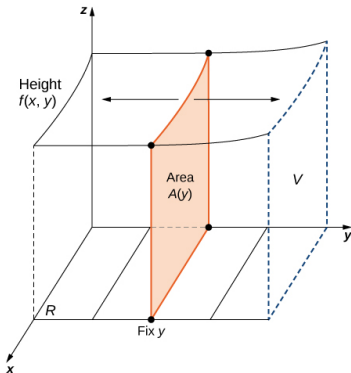
$$\int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy \quad \text{zamiast} \quad \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y) dy \right] dx,$$

i

$$\int_c^d dy \int_a^b f(x, y) dx \quad \text{zamiast} \quad \int_c^d \left[\int_a^b f(x, y) dx \right] dy$$



(a)



(b)

Rysunek 3: Twierdzenie Fubiniego dla funkcji ciągłej na prostokącie.
 źródło: OpenStax Calculus; $A(x)$ oznacza powierzchnię przekroju odpowiadającą ustalonej wartości x („fix x ”); $A(y)$ oznacza powierzchnię przekroju odpowiadającą ustalonej wartości y („fix y ”); funkcja f przedstawiona jest jako wysokość prostopadłościanu krzywopowierzchniowego; zakładamy, że funkcja f jest nieujemna.
 Źródło: [OSC3, s. 485].

Przykład

Obliczyć

$$\iint_R f(x, y) dP,$$

gdzie $f(x, y) = x$ i

$$R = [0, 2] \times [0, 1] = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 1\}.$$

Rozwiązanie.

$$\iint_R f(x, y) dP = \iint_R f(x, y) dx dy = \quad (6)$$

$$= \int_{y=0}^{y=1} \int_{x=0}^{x=2} x dx dy = \quad (7)$$

$$= \int_{y=0}^{y=1} \left(\left[\frac{x^2}{2} \right]_0^2 \right) dy = \quad (8)$$

$$= \int_{y=0}^{y=1} 2 dy = [2y]_{y=0}^{y=1} = 2. \quad (9)$$

Przykład (z początku wykładu)

Zadanie: obliczyć $\iint_R (xy + e^y) dP$, gdzie R jest prostokątem składającym się z punktów (x, y) spełniających warunki $3 \leq x \leq 4$ i $1 \leq y \leq 2$.

Przyjmując porządek: najpierw całkujemy po dy potem po dx :

$$\begin{aligned}\iint_R (xy + e^y) dP &= \int_3^4 \int_1^2 (xy + e^y) dy dx \\&= \int_3^4 \left(\left[\frac{1}{2}xy^2 + e^y \right]_1^2 \right) dx \\&= \int_3^4 \left(\frac{3}{2}x + e^2 - e \right) dx \\&= \left[\frac{3}{4}x^2 + (e^2 - e)x \right]_3^4 \\&= \frac{21}{4} + e^2 - e \approx 9.92.\end{aligned}$$

Przykład (z początku wykładu) -c.d.

Przyjmując porządek: najpierw całkujemy po dx potem po dy :

$$\begin{aligned}\iint_R (xy + e^y) \, dP &= \int_1^2 \int_3^4 (xy + e^y) \, dx \, dy \\&= \int_1^2 \left(\left[\frac{1}{2} x^2 y + x e^y \right]_3^4 \right) dy \\&= \int_1^2 \left(\frac{7}{2} y + e^y \right) dy \\&= \left[\frac{7}{4} y^2 + e^y \right]_1^2 \\&= \frac{21}{4} + e^2 - e \approx 9.92.\end{aligned}$$

Wykres: Rys. 1.

Całka podwójna z funkcji o rozdzielonych zmiennych

Niech funkcje f i g będą ciągłe odpowiednio na przedziałach $[a, b]$ i $[c, d]$. Wtedy dla

$$R = [a, b] \times [c, d] = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d.\}$$

$$\iint_R g(x)h(y)dxdy = \left(\int_a^b g(x)dx\right) \cdot \left(\int_c^d h(y)dy\right)$$

Przykład 1

Dla $R = [0, 2] \times [0, 2]$

$$\iint_R e^{x+y}dxdy = \iint_R e^x e^y dxdy = \int_0^2 e^x dx \cdot \int_0^2 e^y dy = (e^2 - 1)^2.$$

Całka podwójna po obszarze

Definicja 2

Niech f będzie funkcją określoną i ograniczoną na zbiorze $D \subset \mathbb{R}^2$ oraz niech R będzie dowolnym prostokątem zawierającym obszar D . Niech funkcja f^* będzie określona wzorem

$$f^*(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & \text{dla } (x, y) \in D, \\ 0 & \text{dla } (x, y) \in R \setminus D. \end{cases}$$

Całkę podwójną funkcji f po obszarze D definiujemy wzorem

$$\iint_D f(x, y) dP = \iint_R f^*(x, y) dP,$$

o ile całka po prawej stronie istnieje (powiemy wtedy: f jest całkowna).

Uwaga 1

Całka

$$\iint_R f^*(x, y) dP$$

nie zależy od wyboru R .

Obszary normalne względem osi układu

Obszar domknięty D nazywamy obszarem normalnym względem osi Ox , jeżeli można przedstawić go w postaci

$$D = \{(x, y) : a \leq x \leq b, g(x) \leq y \leq h(x)\},$$

gdzie g i h są funkcjami ciągłymi na $[a, b]$ spełniającymi warunek

$$g(x) < h(x) \quad \text{dla każdego } x \in (a, b).$$

Obszar domknięty D nazywamy obszarem normalnym względem osi Oy , jeżeli można przedstawić go w postaci

$$D = \{(x, y) : c \leq y \leq d, p(y) \leq x \leq q(y)\},$$

gdzie p i q są funkcjami ciągłymi na $[c, d]$ spełniającymi warunek

$$p(y) < q(y) \quad \text{dla każdego } y \in (c, d).$$

Przykład 2

Obszar

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1,5, x^2 \leq y \leq 3x - x^2\}$$

jest obszarem normalnym względem osi Ox . Można pokazać, że jest on również obszarem normalnym względem osi Oy . (por. aplet „Obszar normalny” Geogebra).

Całki iterowane po obszarach normalnych

Twierdzenie 5

Jeżeli funkcja f jest ciągła na obszarze domkniętym

$$D = \{(x, y) : a \leq x \leq b, g(x) \leq y \leq h(x)\}$$

normalnym względem osi Ox , to

$$\iint_D f(x, y) dP = \int_a^b \left[\int_{g(x)}^{h(x)} f(x, y) dy \right] dx, \quad (10)$$

gdzie g i h są funkcjami ciągłymi na $[a, b]$ takimi, że $g(x) < h(x)$ dla $x \in (a, b)$. Jeżeli funkcja f jest ciągła na obszarze domkniętym

$$D = \{(x, y) : c \leq y \leq d, p(y) \leq x \leq q(y)\}$$

normalnym względem osi Oy , to

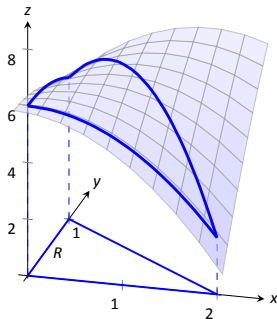
$$\iint_R f(x, y) dP = \int_c^d \left[\int_{p(y)}^{q(y)} f(x, y) dx \right] dy. \quad (11)$$

Całkę po prawej stronie (10) można zapisać krócej: $\int_a^b dx \int_{g(x)}^{h(x)} f(x, y) dy$.

Całkę po prawej stronie (11) można zapisać krócej: $\int_c^d dy \int_{p(y)}^{q(y)} f(x, y) dx$.

Przykład

Obliczyć $\iint_R (3xy - x^2 - y^2 + 6) \, dP$, gdzie R jest trójkątem ograniczonym przez proste $x = 0$, $y = 0$ i $x/2 + y = 1$.



Rysunek 4:

Przykład — c.d.

Wykonajmy obliczenia zgodnie z porządkiem $dy \, dx$:

Ograniczenia ze względu na y „przebiegają od krzywej do krzywej”: $0 \leq y \leq 1 - x/2$, ograniczenia ze względu na x „przebiegają od punktu do punktu”: $0 \leq x \leq 2$.

$$\begin{aligned}\iint_R (3xy - x^2 - y^2 + 6) \, dP &= \int_0^2 \int_0^{-\frac{x}{2}+1} (3xy - x^2 - y^2 + 6) \, dy \, dx \\&= \int_0^2 \left[\frac{3}{2}xy^2 - x^2y - \frac{1}{3}y^3 + 6y \right]_0^{-\frac{x}{2}+1} dx \\&= \int_0^2 \left(\frac{11}{12}x^3 - \frac{11}{4}x^2 - x + \frac{17}{3} \right) dx \\&= \left[\frac{11}{48}x^4 - \frac{11}{12}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{17}{3}x \right]_0^2 \\&= \frac{17}{3}.\end{aligned}$$

Przykład — c.d.

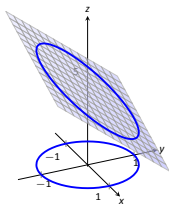
Wykonajmy teraz obliczenia zgodnie z porządkiem $dx \, dy$: x

„przebiega od krzywej do krzywej”, $0 \leq x \leq 2 - 2y$, y

„przebiega od punktu do punktu”, $0 \leq y \leq 1$:

$$\begin{aligned} \iint_R (3xy - x^2 - y^2 + 6) \, dP &= \int_0^1 \int_0^{2-2y} (3xy - x^2 - y^2 + 6) \, dx \, dy \\ &= \int_0^1 \left[\frac{3}{2}x^2y - \frac{1}{3}x^3 - xy^2 + 6x \right]_0^{2-2y} dy \\ &= \int_0^1 \left(\frac{32}{3}y^3 - 22y^2 + 2y + \frac{28}{3} \right) dy \\ &= \left[\frac{8}{3}y^4 - \frac{22}{3}y^3 + y^2 + \frac{28}{3}y \right]_0^1 \\ &= \frac{17}{3}. \end{aligned}$$

Współrzędne biegunowe w całkach podwójnych — przykład wprowadzający



Dla funkcji f określonej wzorem

$$f(x, y) = 4 - x - 2y, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2,$$

obliczyć

$$\iint_R f(x, y) dP,$$

gdzie R jest kołem o równaniu $x^2 + y^2 \leq 1$.

Współrzędne biegunowe

Położenie punktu na płaszczyźnie P można opisać parą liczb (θ, r) , gdzie θ oznacza miarę kąta między dodatnią częścią osi Ox a promieniem wodzącym punktu P , $0 \leq \theta < 2\pi$ (albo $-\pi < \theta \leq \pi$); r oznacza odległość punktu P od początku układu współrzędnych, $0 \leq r < \infty$.

Fakt 1

Współrzędne kartezjańskie (x, y) punktu płaszczyzny określonego przez współrzędne biegunowe (θ, r) określone są wzorami:

$$x = r \cos \theta,$$

$$y = r \sin \theta.$$

Uwaga 2

Przekształcenie, które punktowi (θ, r) przyporządkowuje punkt (x, y) określony powyższymi wzorami nazywamy przekształceniem biegunowym.

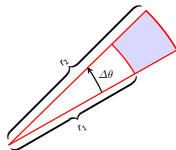
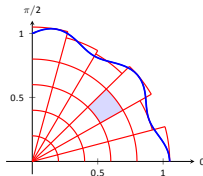
Przykład 3

Krzywa określona we współrzędnych biegunowych przez warunki:

$$r = 2, \theta \in [0, \pi]$$

główna połowa okręgu o środku początku układu współrzędnych i promieniu 2.

Współrzędne biegunowe w całkach podwójnych



Rozważmy figurę (obszar) przedstawiony na rysunku po lewej stronie. Jej pole można w sposób przybliżony obliczyć sumując pola „obszarów elementarnych”, takich jak obszar zacieniowany na rysunku po lewej stronie. Oznaczmy pole tego obszaru przez ΔP_i . Mamy

$$\Delta P_i = \frac{1}{2}r_2^2\Delta\theta - \frac{1}{2}r_1^2\Delta\theta = \frac{r_2 + r_1}{2}(r_2 - r_1)\Delta\theta.$$

Jeżeli $\Delta r = r_2 - r_1$ i $\Delta\theta$ są „bardzo małe”, to $\Delta P_i \approx r_1 \Delta r \Delta\theta$.
Przechodząc do granicy: $dP = r dr d\theta$.

Współrzędne biegunowe w całkach podwójnych — c.d.

Twierdzenie 6

Niech $z = f(x, y)$ będzie funkcją określoną na obszarze R wyznaczone przez nierówności (wyrażone we współrzędnych biegunowych):

$$\alpha \leq \theta \leq \beta \quad i \quad g(\theta) \leq r \leq h(\theta).$$

Wtedy

$$\iint_R f(x, y) dP = \int_{\alpha}^{\beta} \int_{g(\theta)}^{h(\theta)} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta,$$

gdzie funkcje g i h są nieujemne i ciągłe na przedziale $[\alpha, \beta] \subset [0, 2\pi]$.

Współrzędne biegunowe w całkach podwójnych, przykład wprowadzający — c.d.

Dla funkcji f określonej wzorem

$$f(x, y) = 4 - x - 2y, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2,$$

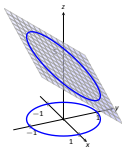
obliczyć

$$I = \iint_R f(x, y) dP,$$

gdzie R jest kołem o równaniu $x^2 + y^2 \leq 1$.

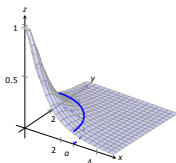
Rozwiązanie. Koło we współrzędnych biegunowych jest określone równaniami $0 \leq r \leq 1$ i $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

$$\begin{aligned} \iint_R f(x, y) dP &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 (4 - r \cos \theta - 2r \sin \theta) r dr d\theta = \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 (4r - r^2(\cos \theta - 2 \sin \theta)) dr d\theta = \\ &= \int_0^{2\pi} \left(2r^2 - \frac{1}{3} r^3 (\cos \theta - 2 \sin \theta) \right) \Big|_0^1 d\theta = \\ &= \int_0^{2\pi} \left(2 - \frac{1}{3} (\cos \theta - 2 \sin \theta) \right) d\theta = \\ &= \left(2\theta - \frac{1}{3} (\sin \theta + 2 \cos \theta) \right) \Big|_0^{2\pi} = \\ &= 4\pi \approx 12,566. \end{aligned}$$



Przykład

Wyznaczyć objętość pod wykresem funkcji $f(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2 + 1}$ nad wycinkiem koła o środku w początku układu współrzędnych i promieniu $a > 0$ ograniczonego przez dodatnie półosie Ox i Oy .



Rysunek 5:

Obszar R , wyrażony we współrzędnych biegunowych, ograniczony jest nierównościami $0 \leq r \leq a$ i $0 \leq \theta \leq \pi/2$. Funkcja podcałkowa wyrażona we współrzędnych biegunowych:

$$\frac{1}{x^2 + y^2 + 1} \Rightarrow \frac{1}{r^2 \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta + 1} = \frac{1}{r^2 + 1}.$$

Wyznaczamy objętość obliczając całkę:

$$\begin{aligned} \iint_R f(x, y) \, dP &= \int_0^{\pi/2} \int_0^a \frac{r}{r^2 + 1} \, dr \, d\theta = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{2} (\ln |r^2 + 1|) \Big|_0^a \, d\theta \\ &= \int_0^{\pi/2} \frac{1}{2} \ln(a^2 + 1) \, d\theta = \left(\frac{1}{2} \ln(a^2 + 1) \theta \right) \Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4} \ln(a^2 + 1). \end{aligned}$$

Przykład — szczegóły rachunkowe

$$\begin{aligned}\int \frac{r}{r^2 + 1} dr &= [t = r^2 + 1, dt = 2r dr, r dr = 1/2 dt] \\ &= \int \frac{dt}{2t} = \frac{1}{2} \ln |t| + C = \frac{1}{2} \ln |1 + r^2| + C.\end{aligned}$$

Całki potrójne

Całka potrójna — uogólnienie całki oznaczonej funkcji jednej zmiennej i całki podwójnej na przypadek funkcji trzech zmiennych.

Definicja całki potrójnej: analogiczna do definicji całki jednej zmiennej i dwóch zmiennych: najpierw definiujemy całkę na prostopadłościanie $P = [a, b] \times [c, d] \times [p, q]$ poprzez podziały P oraz sumy całkowe.

- ▶ Definicja, w której dzielimy P na prostopadłościany o identycznych rozmiarach: [OSC3, s. 547];
- ▶ Definicja, w których P dzielimy na prostopadłościany o różnych rozmiarach: por. np. [Fich80, rozdział 643], [Leja12, str. 375]. i inne „klasyczne” podręczniki.

Fakt 2

Jeżeli funkcja f jest ciągła na P , to jest całkowalna na tym prostopadłościanie.

Oznaczenia i interpretacja fizyczna

Całkę potrójną z funkcji f po prostopadłościanie P oznaczamy symbolem

$$\iiint_P f(x, y, z) dV$$

lub

$$\iiint_P f(x, y, z) dx dy dz.$$

Interpretacja fizyczna: masa bryły (prostopadłościanu) P o gęstości masy f zależnej od x , y i z .

Całka potrójna i całka iterowana

Twierdzenie 7

Jeżeli funkcja f jest ciągła na prostopadłościanie

$$P = [a, b] \times [c, d] \times [p, q] = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d, p \leq z \leq q, \}$$

gdzie a, b, c, d, p i q są liczbami rzeczywistymi takimi, że

$$a < b, \quad c < d \quad i \quad e < f,$$

to

$$\iiint_P f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b \left[\int_c^d \left(\int_p^q f(x, y, z) dz \right) dy \right] dx \quad (12)$$

Uwaga 3

Twierdzenie to będzie prawdziwe także wtedy, gdy po prawej stronie równości napiszemy dowolną inną całkę iterowaną.

Całkę po prawej stronie równości (12) można zapisać krócej:

$$\int_a^b dx \int_c^d dy \int_p^q f(x, y, z) dz.$$

Pozostałe całki iterowane można zapisać podobnie.

Przykład

$$\int_{-1}^1 dx \int_0^1 dy \int_0^2 (x^2 + y^2 + z^2) dz = \int_{-1}^1 dx \int_0^1 (2x^2 + 2y^2 + \frac{8}{3}) dy = \quad (13)$$

$$= \int_{-1}^1 (2x^2 + \frac{2}{3} + \frac{8}{3}) dx = \frac{4}{3} + \frac{20}{3} = \frac{24}{3} = 8. \quad (14)$$

Pierwszą równość w (13) uzasadniają fakty

$$\int_0^2 x^2 dz = 2x^2, \quad \int_0^2 y^2 dz = 2y^2, \quad (15)$$

$$\int_0^2 z^2 dz = \left[\frac{2z^3}{3} \right]_0^2 = \frac{8}{3} - 0 = \frac{8}{3}. \quad (16)$$

Drugą równość w (13) (czyli pierwszą w (13)) uzasadniają fakty:

$$\int_0^1 2x^2 dy = 2x^2, \quad \int_0^1 \frac{8}{3} dy = \frac{8}{3}, \quad (17)$$

$$\int_0^1 2y^2 dy = \left[\frac{2y^3}{3} \right]_0^1 = \frac{2}{3}. \quad (18)$$

Całki potrójne po obszarach normalnych

Definicja 3

Niech f będzie funkcją ograniczoną na zbiorze ograniczonym $U \subset \mathbb{R}^3$ i niech P będzie dowolnym prostopadłościanem zawierającym U ; niech f^* oznacza rozszerzenie funkcji f na P określone wzorem

$$f^*(x, y, z) = \begin{cases} f(x, y, z) & \text{dla } (x, y, z) \in U, \\ 0 & \text{dla } (x, y, z) \notin U. \end{cases}$$

Całkę potrójną funkcji f po obszarze U definiujemy wzorem

$$\iiint_U f(x, y, z) dV = \iiint_P f^*(x, y, z) dV, \quad (19)$$

o ile całka po prawej stronie wzoru (19) istnieje. Mówimy wtedy: funkcja f jest całkowalna na zbiorze U .

Uwaga 4

Całka (19) nie zależy od wyboru prostopadłościanu P .

Całki potrójne po obszarach normalnych — c.d.

Definicja 4

Obszar domknięty U nazywamy obszarem normalnym względem płaszczyzny xOy , jeżeli można go zapisać w postaci

$$U = \{(x, y, z) : (x, y) \in D_{xy}, d(x, y) \leq z \leq g(x, y)\}$$

gdzie D_{xy} jest obszarem normalnym na płaszczyźnie xOy , a funkcje d i g są ciągłe na D_{xy} ,

$$d(x, y) < g(x, y) \quad \text{dla} \quad (x, y) \in \text{Int } D_{xy}.$$

Uwaga 5

Pojęcia: obszar normalny względem płaszczyzny xOz , obszar normalny względem płaszczyzny yOz definiujemy analogicznie.

Całki potrójne po obszarach normalnych — c.d.

Twierdzenie 8

Jeżeli funkcja f jest ciągła na obszarze domkniętym

$$U = \{(x, y, z) : (x, y) \in D_{xy}, \quad d(x, y) \leq z \leq g(x, y)\}$$

normalnym względem płaszczyzny xOy , gdzie d i g są ciągłe na obszarze normalnym D_{xy} , to

$$\iiint_U f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = \iint_{D_{xy}} \left(\int_{d(x,y)}^{g(x,y)} f(x, y, z) \, dz \right) dx \, dy.$$

Uwaga 6

Analogiczne wzory są prawdziwe dla obszarów normalnych względem xOz i yOz

Fakt 3

Jeżeli obszar normalny U względem płaszczyzny xOy może być przedstawiony w postaci

$$U = \{(x, y, z) : a \leq x \leq b, \bar{d}(x) \leq y \leq \bar{g}(x), d(x, y) \leq z \leq g(x, y)\},$$

to

$$\iiint_U f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = \int_a^b dx \int_{\bar{d}(x)}^{\bar{g}(x)} dy \int_{d(x,y)}^{g(x,y)} f(x, y, z) \, dz.$$

Dla płaszczyzn xOz i yOz : analogiczne wzory.

Zagadnienie obliczania masy bryły

Dla bryły V o rozkładzie gęstości

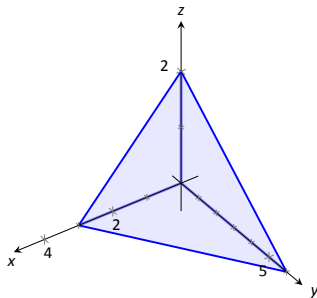
$$g = g(x, y, z)$$

jej masę M możemy wyrazić jako całkę objętościową

$$\iiint_V g(x, y, z) dV.$$

Przykład

Rozważmy bryłę reprezentowaną przez obszar W ograniczony przez płaszczyzny xOy , xOz , yOz i przez płaszczyznę $z = 2 - y/3 - 2x/3$. Gęstość masy bryły jest stała i wynosi 3



Rysunek 6: Obszar W

Przykład — c.d.

Przecięcie płaszczyzny xOy z płaszczyzną $z = 2 - y/3 - 2x/3$: prosta $y = 6 - 2x$. Masa M figury reprezentowanej przez obszar W :

$$\begin{aligned} M &= \iiint_D g(x, y, z) dV \\ &= \int_0^3 \int_0^{6-2x} \int_0^{2-y/3-2x/3} (3) dz dy dx \\ &= \int_0^3 \int_0^{6-2x} 6 - y - 2x dy dx \\ &= \int_0^3 \left[6y - 2xy - \frac{y^2}{2} \right]_0^{6-2x} dx \\ &= \int_0^3 -\frac{1}{2}(6-2x)^2 + 6(6-2x) - 2x(6-2x) dx \\ &= \int_0^3 -18 + 12x - 2x^2 + 36 - 12x - 12x + 4x^2 dx = \\ &= \int_0^3 2x^2 - 12x + 18 dx = 2 \cdot \frac{3^3}{3} - 6 \cdot 3^2 + 18 \cdot 3 = 18. \end{aligned}$$

Środek ciężkości układu punktów materialnych — przypomnienie

Środek ciężkości układu dwóch punktów

Punkty P_1 i P_2 leżą na prostej OX;

P_1 — waga w_1 ; współrzędna x_1 ;

P_2 — waga w_2 ; współrzędna x_2 .

Środek ciężkości: $\frac{w_1 x_1 + w_2 x_2}{w_1 + w_2}$

Środek ciężkości układu punktów $P_1, P_2, \dots, P_n$ o

współrzędnych $x_1, x_2, \dots, x_n$ i wagach $w_1, w_2, \dots, w_n$:

$$\frac{\sum_{i=1}^n w_i x_i}{\sum_{i=1}^n w_i}.$$

Wyrażenie w liczniku: moment (rzędu pierwszego).

Środek ciężkości pręta — przypomnienie

Pręt „leżący na osi OX”;

a i b ; $a < b$;

ρ - gęstość (na jednostkę długości)

Przybliżona wartość współrzędnej poziomej środka ciężkości:

$$S_n = \frac{\sum_{i=1}^n [a + (i-1)h] \rho(a + (i-1)h) h}{\sum_{i=1}^n \rho(a + (i-1)h) h}$$

gdzie $h = (b - a)/n$.

S_n jest środkiem ciężkości układu punktów o współrzędnych

$$a, a + h, a + 2h, \dots, a + (n-1)h$$

o wagach

$$h\rho(a), h\rho(a + h), \dots, h\rho(a + (n-1)h).$$

Środek ciężkości pręta— c.d. — przypomnienie

Można pokazać, że środek ciężkości pręta (jego współrzędna pozioma) jest równy:

$$s = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{\int_a^b x \rho(x) dx}{\int_a^b \rho(x) dx}.$$

Całka w liczniku — moment (statyczny względem punktu $x = 0$).

Pojęcie momentu w mechanice

Moment:

- ▶ dla układu punktów: ważona suma znakowanych odległości od ustalonego obiektu (punktu na osi Ox , danej prostej lub danej płaszczyzny);
- ▶ dla pręta, figury płaskiej lub przestrzennej: odpowiednia całka.

Przypomnijmy: masa M bryły reprezentowanej przez zbiór D

$$M = \iiint_D g(x, y, z) dV,$$

gdzie $g = g(x, y, z)$ — gęstość masy w punkcie (x, y, z) .

Definicja 5

1. *Moment względem płaszczyzny yOz :*

$$M_{yz} = \iiint_D xg(x, y, z) dV.$$

2. *Moment względem płaszczyzny xOz :*

$$M_{xz} = \iiint_D yg(x, y, z) dV.$$

3. *Moment względem płaszczyzny xOy :*

$$M_{xy} = \iiint_D zg(x, y, z) dV.$$

4. *środek ciężkości:*

$$(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = \left(\frac{M_{yz}}{M}, \frac{M_{xz}}{M}, \frac{M_{xy}}{M} \right).$$

$$\begin{aligned}
M_{xy} &= \iiint_D 3z \, dV \\
&= \int_0^3 \int_0^{6-2x} \int_0^{2-y/3-2x/3} (3z) \, dz \, dy \, dx \\
&= \int_0^3 \int_0^{6-2x} \frac{3}{2} (2 - y/3 - 2x/3)^2 \, dy \, dx \\
&= \int_0^3 -\frac{4}{9} (x-3)^3 \, dx \\
&= 9.
\end{aligned}$$

W podobny sposób można sprawdzić, że

$$\begin{aligned}
M_{yz} &= \iiint_D 3x \, dV \\
&= \frac{27}{2}. \\
M_{xz} &= \iiint_D 3y \, dV \\
&= 27.
\end{aligned}$$

Środek masy (ciężkości) jest równy:

$$(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = \left(\frac{27/2}{18}, \frac{27}{18}, \frac{9}{18} \right) = (0.75, 1.5, 0.5).$$

Literatura

[OSC3] Open Stax Calculus, t.3,

`openstax.org/details/books/calculus-volume-3`

[Fich80] Fichtenholz, G., Rachunek różniczkowy i całkowy, t. 3, PWN, Warszawa 1980.

[Leja12] Leja, F. Rachunek różniczkowy i całkowy, wyd. 17, PWN, Warszawa 2012.