

Funkcje wielu zmiennych: ciągłość, pochodne cząstkowe

dr Mariusz Grządział

Katedra Matematyki, Uniwersytet Przyrodniczy we Wrocławiu

semestr zimowy; rok akademicki 2022/2023

Przestrzeń n -wymiarowa I

Funkcje odwzorowującą zbiór $\{1, 2, \dots, n\}$ w zbiór liczb rzeczywistych będziemy nazywać ciągiem skończonym.

Przykład 1

Ciąg skończony $(2, 4, 7)$ -funkcja, która przyporządkowuje argumentowi 1 liczbę 2, argumentowi 2 liczbę 4, argumentowi 3 liczbę 7.

Definicja 1

Zbiór wszystkich ciągów skończonych $(x_1, \dots, x_n)$, gdzie $x_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \dots, n$, będziemy nazywać przestrzenią n -wymiarową i oznaczać $\mathbb{R}^n$.

Przestrzeń $\mathbb{R}^2$ nazywamy płaszczyzną, przestrzeń $\mathbb{R}^3$ przestrzenią trójwymiarową (lub po prostu przestrzenią).

Elementy $(x_1, \dots, x_n)$ — punkty przestrzeni $\mathbb{R}^n$ o współrzędnych $x_1, x_2, \dots, x_n$.

Przestrzeń n-wymiarowa II

Początek układu współrzędnych (punkt, którego wszystkie współrzędne są równe 0) będziemy oznaczać przez $\mathbf{0}$.

Odległość $|AB|$ punktów $A = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ i $B = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ przestrzeni $\mathbb{R}^n$ dana jest wzorem

$$|AB| = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + \dots + (a_n - b_n)^2}.$$

Definicja 2

Otoczeniem punktu $A_0 \in \mathbb{R}^n$ o promieniu $r > 0$ będziemy nazywać zbiór $O(A_0, r) = \{A \in \mathbb{R}^n : |A_0 A| < r\}$.

Inne oznaczenie: $K(A_0, r)$ — „n-wymiarowa kula o promieniu r ”.

Przestrzeń n -wymiarowa III

Niech będą dane w $\mathbb{R}^n$ dwa punkty

$$a = (a_1, \dots, a_n), \quad b = (b_1, \dots, b_n),$$

takie, że

$$a_i < b_i, \quad \text{dla } i = 1, \dots, n.$$

Zbiór wszystkich punktów $x = (x_1, \dots, x_n)$ takich, że

$$a_i < x_i < b_i, \quad \text{dla } i = 1, \dots, n.$$

będziemy nazywać otwartym przedziałem n -wymiarowym o wierzchołkach a i b i oznaczać przez $P(a, b)$.

Przestrzeń n -wymiarowa IV

Definicja 3

Sąsiedztwem punktu $A_0 \in \mathbb{R}^n$ o promieniu $r > 0$ będziemy nazywać zbiór $S(A_0, r) = \{A \in \mathbb{R}^n : 0 < |A_0 A| < r\}$.

Definicja 4

Powiemy, że zbiór $D \subset \mathbb{R}^n$ jest ograniczony, jeżeli jest on zawarty w pewnym otoczeniu punktu 0 .

Zbiór jest nieograniczony — jeżeli nie jest ograniczony.

Definicja 5

Powiemy, że punkt A zbioru P jest punktem wewnętrznym tego zbioru, jeżeli istnieje otoczenie A , które jest zawarte w P .

Definicja 6

Zbiór wszystkich punktów wewnętrznych zbioru P będziemy nazywać wnętrzem zbioru P i oznaczać symbolem $\text{Int } P$.

Przestrzeń n -wymiarowa V

Definicja 7

Zbiór nazwiemy otwartym, jeżeli każdy punkt należący do niego jest jego punktem wewnętrznym.

Definicja 8

Punkt A będziemy nazywać punktem brzegowym zbioru P , jeżeli w każdym otoczeniu tego punktu istnieją: punkt należący do P i punkt, który nie należy do P .

Definicja 9

Brzegiem zbioru będziemy nazywać zbiór jego punktów brzegowych.

Przykład 2

Brzegiem koła otwartego o środku w $\mathbf{0}$ i promieniu 1 jest okrąg o środku w $\mathbf{0}$ promieniu 1.

Przestrzeń n-wymiarowa VI

Definicja 10

Odcinkiem o końcach w punktach $A = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ i $B = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ przestrzeni $\mathbb{R}^n$ będziemy nazywać zbiór AB określony wzorem

$$AB = \{t(a_1, a_2, \dots, a_n) + (1 - t)(b_1, b_2, \dots, b_n) : 0 \leq t \leq 1\}.$$

Definicja 11

Niech $A = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ i $B = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ będą punktami przestrzeni $\mathbb{R}^n$. Sumę odcinków

$$A_1 A_2 \cup A_2 A_3 \cup \dots \cup A_{m-1} A_m,$$

gdzie $A_k \in \mathbb{R}^n$, $k = 1, 2, \dots, n$, $A_1 = A$ i $B_1 = B$, będziemy nazywać łamaną łączącą punkty A i B .

Przestrzeń n-wymiarowa VII

Definicja 12

Powiemy, że zbiór $Z \subset \mathbb{R}$ jest obszarem otwartym, jeżeli jest on niepusty, otwarty oraz każde dwa jego punkty można połączyć łamaną zawartą w Z .

Definicja 13

Powiemy, że zbiór $Z \subset \mathbb{R}^n$ jest obszarem domkniętym, jeżeli może być przedstawiony w postaci sumy pewnego obszaru otwartego i brzegu tego obszaru.

Definicja 14

Funkcją f określoną na zbiorze $D \subset \mathbb{R}^n$ o wartościach w zbiorze $\mathbb{R}$ nazywamy przyporządkowanie każdemu elementowi ze zbioru D dokładnie jednej liczby rzeczywistej.

Konwencja notacyjna: zapis $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1 + \dots + x_n$ może być odczytana jako skrócona forma zapisu: funkcja f , przyporządkowująca argumentowi $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ wartość $x_1 + \dots + x_n$.

Dziedzina funkcji

Definicja 15

Niech f będzie funkcją określoną na zbiorze $D \subset \mathbb{R}^n$ o wartościach w zbiorze $\mathbb{R}$. Zbiór D funkcji będziemy nazywać dziedziną funkcji f i oznaczać przez D_f . Jeżeli dany jest tylko wzór określający funkcję, to zbiór elementów przestrzeni $\mathbb{R}^n$, dla których wzór ten ma sens, będziemy nazywać dziedziną naturalną funkcji f .

Wykres funkcji dwóch zmiennych

Definicja 16

Wykresem funkcji dwóch zmiennych f o dziedzinie D_f będziemy nazywać zbiór:

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = f(x, y), (x, y) \in D_f\}.$$

Definicja 17

Poziomicą funkcji dwóch zmiennych f odpowiadającą poziomowi $h \in \mathbb{R}$ będziemy nazywać zbiór

$$(x, y) \in D_f : f(x, y) = h.$$

Granica i ciągłość funkcji wielu zmiennych I

Definicja 18

Powiemy, że ciąg $(A^{(n)})$ punktów przestrzeni $\mathbb{R}^m$ jest zbieżny do punktu $A^{(n)} \in \mathbb{R}^m$, jeżeli

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |A^{(n)} A^{(0)}| = 0,$$

co będziemy zapisywać

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A^{(n)} = A^{(0)}. \quad (1)$$

Granica i ciągłość funkcji wielu zmiennych II

Uwaga 1

Można pokazać, że (1) zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy: ciąg pierwszych współrzędnych punktów $A^{(n)}$ jest zbieżny do pierwszej współrzędnej punktu $A^{(0)}$, ciąg drugich współrzędnych punktów $A^{(n)}$ jest zbieżny do drugiej współrzędnej punktu $A^{(0)}$ itd.

Granica i ciągłość funkcji wielu zmiennych III

Definicja 19

Niech $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^m$, gdzie $m \geq 2$. Załóżmy, że funkcja f jest określona na sąsiedztwie $S(A_0, r)$ punktu A_0 o promieniu r , gdzie $A_0 \in \mathbb{R}^m$. Powiemy, że funkcja f ma granicę g w punkcie A_0 , co będziemy zapisywać

$$\lim_{A \rightarrow A_0} f(A) = g, \quad (2)$$

jeżeli dla każdego ciągu $A^{(n)}$ punktów zbioru D różnych od punktu A_0 takiego, że

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A^{(n)} = A_0$$

prawdziwa jest równość

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(A^{(n)}) = g.$$

Granica i ciągłość funkcji wielu zmiennych IV

Uwagi dotyczące konwencji notacyjnych:

- ▶ Jeżeli $A^0(a_1, a_2, \dots, a_m)$, to równość (2) można zapisać:

$$\lim_{(x_1, \dots, x_m) \rightarrow (a_1, \dots, a_m)} f(x_1, \dots, x_m) = g$$

- ▶ dla $n = 2$, $A_0 = (a, b)$ równość (1) można zapisać:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ y \rightarrow b}} f(x, y) = g.$$

Uwaga 2

Jeżeli g jest liczbą rzeczywistą, to powiemy, że jest granicą właściwą; jeżeli $g = -\infty$ lub $g = \infty$, to powiemy, że g jest granicą niewłaściwą.

Granica i ciągłość funkcji wielu zmiennych V

Uwaga 3

Punkt A^0 nie musi należeć do zbioru D .

Definicja 20

Niech $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^m$. Powiemy, że funkcja f jest ciągła w punkcie A^0 , jeżeli istnieje $r > 0$ takie, że $O(A^0, r) \subset D$ i

$$\lim_{A \rightarrow A^0} f(A) = f(A^{(0)}). \quad (3)$$

Definicja 21

Niech $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^m$. Powiemy, że funkcja f jest ciągła na zbiorze D (lub w zbiorze D), jeżeli jest ciągła w każdym punkcie zbioru D .

Granica i ciągłość funkcji wielu zmiennych VI

Sformułowanie funkcja f jest ciągła będziemy rozumieć jako skróconą formę sformułowania: funkcja f jest ciągła na swojej dziedzinie.

Ciągłość funkcji wielomianowej

Jednomianem n zmiennych nazywamy funkcję m postaci:

$$m(x_1, x_2, \dots, x_n) = ax_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_n^{k_n}$$

stopniem jednomianu m będziemy nazywać sumę wykładników stojących przy niewiadomych składających się na jednomian $k_1 + k_2 + \dots + k_n$, $k_i \in \mathbb{N}$, $i = 1, \dots, n$.

Wielomian zmiennych $x_1, x_2, \dots, x_n$: suma jednomianów tych zmiennych. Stopień wielomianu: największy ze stopni tych jednomianów (o niezerowych współczynnikach).

Fakt 1

Wielomian wielu zmiennych jest funkcją ciągłą.

Twierdzenie 1

Jeżeli funkcje $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $g : D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^m$ są funkcjami ciągłymi, to ciągłe są również:



$$c_1 f + c_2 g, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R};$$

▶ *iloczyn $f \cdot g$;*

▶ *iloraz f/g na zbiorze $D_0 = \{A \in D : g(A) \neq 0\}$*

Twierdzenie 2

Jeżeli $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^m$ jest ciągła, $g : f(D) \rightarrow \mathbb{R}$ jest ciągła, to złożenie $g \circ f$ funkcji g i f też jest funkcją ciągłą.

Twierdzenie 3

Założmy, że funkcje $f_1, f_2, \dots, f_m : U \rightarrow \mathbb{R}$, $U \subset \mathbb{R}^n$ są ciągłe, funkcja $g : V \rightarrow \mathbb{R}$, $V \subset \mathbb{R}^m$ jest ciągła oraz $(f_1(x), f_2(x), \dots, f_m(x)) \in V$ dla $x \in U$. Wtedy funkcja

$$g(f_1(x), f_2(x), \dots, f_m(x))$$

jest ciągła na U .

Twierdzenie 4

Jeżeli $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^m$ jest ciągła w punkcie $A^{(0)} \in D$ i $f(A^{(0)}) > 0$, to istnieje $\epsilon > 0$ taki, że spełniony jest warunek: Jeżeli $A \in D$ i $|AA^{(0)}| < \epsilon$, to $f(A) > 0$. Twierdzenie pozostaje prawdziwe, gdy znak $>$ zmienimy na $<$.

Twierdzenie 5

Jeżeli funkcja $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ jest ciągła i $D \subset \mathbb{R}^m$ jest niepusty, domknięty i ograniczony, to istnieją $P_1 \in D$ i $P_2 \in D$ takie, że

$$f(P_1) \leq f(P) \leq f(P_2)$$

dla dowolnego punktu $P \in D$.

Przykłady

Funkcje

$$f_1(x, y) = x^3 + y^4 + xy,$$

$$f_2(x, y) = \sin(x^3 + y^4 + xy),$$

$$f_3(x, y) = (\sin x + \cos x)^2.$$

są ciągłe.

Pochodne cząstkowe I

Definicja 22

Niech $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^m$, $A \in \text{Int } D$, $A = (a_1, \dots, a_m)$. Jeżeli istnieje granica właściwa

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a_1, \dots, a_{i-1}, a_i + h, a_{i+1}, \dots, a_m) - f(a_1, \dots, a_{i-1}, a_i, a_{i+1}, \dots, a_m)}{h}, \quad (4)$$

to granicę tę będziemy nazywać pochodną cząstkową pierwszego rzędu funkcji f względem zmiennej x_i w punkcie A i oznaczać:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(A) \quad \text{lub} \quad f_{x_i}(A).$$

Pochodne cząstkowe II

Granice (4) można oznaczyć również:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a_1, \dots, a_m) \quad \text{lub} \quad f_{x_i}(a_1, \dots, a_m).$$

Symbolem

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}, \quad i = 1, \dots, m \tag{5}$$

będziemy oznaczać funkcję przyporządkowującą punktowi A liczbę $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ określoną na zbiorze

$$\{A \in D : \frac{\partial f}{\partial x_i} \text{ istnieje}\}$$

Funkcje określone wzorem (5): pochodne cząstkowe pierwszego rzędu funkcji f .

Pochodne cząstkowe III

Dla $m = 2$ zmienne niezależne zazwyczaj oznaczamy przez x i y .
Pochodne cząstkowe $f = f(x, y)$ oznaczmy symbolami:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \quad \text{ i } \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0). \quad (6)$$

Tak więc

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}, \quad (7)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + h) - f(x_0, y_0)}{h}. \quad (8)$$

Używamy również oznaczeń: $f_x(x_0, y_0)$, $f_y(x_0, y_0)$.

Pochodne cząstkowe IV

Dla $m = 3$ zmienne niezależne zazwyczaj oznaczamy przez x , y i z . Pochodne cząstkowe $f = f(x, y, z)$ oznaczmy symbolami:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0), \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) \quad \text{ i } \quad \frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0). \quad (9)$$

Mamy

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h, y_0, z_0) - f(x_0, y_0, z_0)}{h}, \quad (10)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + h, z_0) - f(x_0, y_0, z_0)}{h}, \quad (11)$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0, z_0 + h) - f(x_0, y_0, z_0)}{h}. \quad (12)$$

Używamy również oznaczeń: $f_x(x_0, y_0, z_0)$, $f_y(x_0, y_0, z_0)$,
 $f_z(x_0, y_0, z_0)$.

Pochodne cząstkowe V

Przykład 3

Niech $f(x, y) = x^2 + y^3 + xy$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + y, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 3y^2 + x.$$

Pochodne te można obliczyć korzystając z definicji lub

- ▶ obliczyć $\frac{\partial f}{\partial x}$ traktując y jako stałą;
- ▶ obliczyć $\frac{\partial f}{\partial y}$ traktując x jako stałą.

W podobny sposób można obliczać pochodne cząstkowe funkcji wielu zmiennych, gdy liczba zmiennych jest większa niż 2.

Pochodne wyższych rzędów I

Definicja 23

Niech $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^m$. Niech będzie dany punkt $A \in D$. Jeżeli w pewnym otoczeniu punktu A istnieje pochodna cząstkowa $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ oraz istnieje

$$\frac{\partial f}{\partial x_k} \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} \right) (A),$$

to pochodną tę będziemy nazywać pochodną cząstkową drugiego rzędu funkcji f w punkcie A względem zmiennych x_j i x_k oraz oznaczać

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j} (A) \quad \text{lub} \quad f_{x_k x_j} (A).$$

Pochodne wyższych rzędów II

W przypadku, gdy $k = j$ piszemy

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_k^2}(A) \quad \text{zamiast} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j}(A).$$

Uwaga. W skrypcie E. Ferenstein i in. $f_{x_k x_j}(A)$ odpowiada innemu porządkowi różniczkowań niż w tej prezentacji; nasze oznaczenia identyczne jak w książka F. Lei i podręczniku M. Gewerta i Z. Skoczylasa. Oznaczenie $f_{x_j x_j}(A)$ jest (mam wrażenie) częściej stosowane w literaturze niż $f_{x_j^2}(A)$.

Przykład

Rozważmy funkcję f określoną wzorem

$$f(x, y) = x^4 + 4x^2y^3 + 7xy + 1 \text{ Mamy}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = (x^4 + 4x^2y^3 + 7xy + 1)_x = 4x^3 + 8y^3x + 7y,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = (x^4 + 4x^2y^3 + 7xy + 1)_y = 12x^2y^2 + 7x,$$

więc

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 12x^2 + 8y^3,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 24xy^2 + 7,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 24x^2y.$$

Przykład

Rozważmy funkcję f określoną wzorem $f(x, y) = \sin x \cos y$. Mamy

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \cos x \cos y,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -\sin x \sin y,$$

więc

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -\sin x \cos y,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = -\cos x \sin y,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -\sin x \cos y.$$

Twierdzenie 6

Jeżeli w pewnym otoczeniu punktu (x_0, y_0) (dla pewnego $r > 0$) pochodne

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k} \quad i \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j}$$

istnieją i są ciągłe, to są sobie równe w tym punkcie.

Definicja 24

Pochodne cząstkowe wyższych rzędów określamy podobnie.

Pochodna cząstkowa rzędu k -tego w punkcie A jest więc wynikiem k po sobie następujących różniczkowań ze względu na zmienne x i y (w przypadku, gdy obliczamy pochodne cząstkowe funkcji dwóch zmiennych). Pochodną cząstkową rzędu k -tego, którą otrzymamy: obliczając q razy pochodną względem y a następnie obliczając p razy pochodną cząstkową względem x , będziemy oznaczać symbolem:

$$\frac{\partial^k f}{\partial x^p \partial y^q}(A) \quad \text{lub} \quad f_{x^p, y^q}(A). \quad (13)$$

Uwaga. Jeżeli funkcja f ma wszystkie pochodne: 1-szą, ..., k -szą ciągłe, to wynik różniczkowania nie zależy od porządku różniczkowań względem x i y . Przykładowo: $f_{x^2, y^3, x}(A) = f_{x^3, y^3}(A)$ przy założeniu, że f ma ciągłe pochodne rzędu mniejszego lub równego 6 w punkcie A (jest funkcją klasy $C^{(6)}$ na $\mathbb{R}^2$).

Oznaczenie

Powiemy, że funkcja $f : D \mapsto \mathbb{R}$, gdzie $D \subset \mathbb{R}^n$ jest obszarem, jest funkcją klasy $C^{(m)}$, jeżeli ma ciągłe pochodne cząstkowe rzędu p , gdzie $p = 1, 2, \dots, m$.

Przykład

Funkcja f określona jest wzorem $f(x, y) = x^3 y^4$. Obliczyć (a) $f_{x^3, y^3}(x, y)$ i (b) $f_{x^2, y^3, x}(x, y)$.

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad f_y(x, y) &= x^3 \cdot 4y^3(x, y); \quad f_{yy}(x, y) = x^3 \cdot 4 \cdot 3y^2; \\ f_{y^3}(x, y) &= x^3 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2y = 24x^3 y; \quad f_{x, y^3}(x, y) = 3x^2 \cdot 24y; \\ f_{x^2, y^3}(x, y) &= 6x \cdot 24y; \quad f_{x^3, y^3}(x, y) = 6 \cdot 24 = 144y. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(b)} \quad f_x(x, y) &= 3x^2 \cdot y^4; \quad f_{yx}(x, y) = 3x^2 \cdot 4y^3; \\ f_{yyx}(x, y) &= 3x^2 \cdot 12y^2; \quad f_{y^3, x}(x, y) = 3x^2 \cdot 24y; \\ f_{x, y^3, x}(x, y) &= 6x \cdot 24y; \quad f_{x^2, y^3, x}(x, y) = 6 \cdot 24y = 144y. \end{aligned}$$

Pochodne cząstkowe wyższych rzędów — c.d.

W przypadku funkcji trzech zmiennych:

$$\frac{\partial^k f}{\partial x^p \partial y^q \partial z^r} \quad \text{lub} \quad f_{x^p, y^q, z^r}$$

oznacza pochodną cząstkową rzędu k , którą otrzymamy: r razy pochodną względem z , q razy pochodną względem y i p razy pochodną cząstkową względem x , gdzie $p + q + r = k$.

Uwaga. Jeżeli funkcja f ma wszystkie pochodne: 1-szą, ..., k -szą ciągłe, to wynik różniczkowania nie zależy od porządku różniczkowań względem x , y i z . Przykładowo:

$$f_{x^2, y^3, z^2}(A) = f_{z, x, y^3, x, z}(A) \text{ przy założeniu, że } f \text{ jest klasy } C^{(7)}.$$

Przykład

Funkcja f określona jest wzorem $f(x, y, z) = x^3 y^4 z^2$. Obliczyć (a) $f_{x^2, y^3, z^2}(x, y, z)$ i (b) $f_{z, x, y^3, x, z}(x, y, z)$.

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad f_z(x, y, z) &= x^3 y^4 \cdot 2z; \quad f_{zz}(x, y, z) = x^3 y^4 \cdot 2; \\ f_{yzz}(x, y, z) &= x^3 \cdot 4y^3 \cdot 2; \quad f_{yyzz}(x, y, z) = x^3 \cdot 24y^2; \\ f_{y^3, z^2}(x, y, z) &= 48x^3 y; \quad f_{x, y^3, z^2}(x, y, z) = 144x^2 y; \quad f_{x^2, y^3, z^2}(x, y, z) = 288xy. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(b)} \quad f_{xz}(x, y, z) &= 6x^2 y^4 z; \quad f_{yxz}(x, y, z) = 24x^2 y^3 z; \quad f_{yyxz}(x, y, z) = 72x^2 y^2 z; \\ f_{y^3 xz}(x, y, z) &= 144x^2 yz; \quad f_{x, y^3, x, z}(x, y, z) = 288xyz; \quad f_{z, x, y^3, x, z}(x, y, z) = 288xy. \end{aligned}$$

Gradient

Definicja 25

Niech $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^m$, gdzie D jest zbiorem otwartym. Jeżeli istnieją wszystkie pochodne cząstkowe

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_m}$$

pierwszego rzędu w punkcie A , to wektor

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_m} \right)$$

będziemy nazywać gradientem funkcji f w punkcie A i oznaczać symbolem $\text{grad } f(A)$ lub $\nabla f(A)$. Funkcję przyporządkowującą każdemu punktowi A , w którym gradient jest określony, wektor $\nabla f(A)$, będziemy oznaczać symbolem $\text{grad } f$ lub ∇f .

Przykład

Niech $f(x, y, z) = xy^2 + 3z^4$. Wyznaczyć gradient funkcji f i $\text{grad } f(2, 5, 3)$.

Mamy

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y^2$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2xy$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = 12z^3.$$

$$\text{grad } f(2, 5, 3) = (5^2, 20, 12 \cdot 3^3) = (25, 20, 324).$$

Iloczyn skalarny

Uwaga 4

Dla wektorów $x, y \in \mathbb{R}^m$, $x = (x_1, x_2, \dots, x_m)$, $y = (y_1, y_2, \dots, y_m)$ ich iloczyn skalarny definiujemy wzorem

$$x \circ y = \sum_{k=1}^m x_k y_k.$$

Długość $\|x\|$ wektora $x = (x_1, x_2, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m$ określona jest wzorem

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_m^2} = \sqrt{x \circ x}.$$

Twierdzenie 7

Niech $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^m$. Jeżeli funkcja f ma ciągłe pochodne cząstkowe pierwszego rzędu w pewnym otoczeniu punktu $A \in \text{Int } D$, to

$$\lim_{v \rightarrow 0} \frac{f(A + v) - f(A) - \text{grad } f(A) \circ v}{\|v\|} = 0. \quad (14)$$

Uwaga. Warunek (14) może być spełniony, choć pochodne cząstkowe funkcji f istnieją tylko w punkcie A .

Definicja 26

Mówimy, że funkcja f ma w punkcie A pochodną zupełną albo krócej pochodną $f'(A)$, jeżeli: (a) ma wszystkie pochodne cząstkowe w punkcie A ; (b) spełniony jest w punkcie A warunek (14). Przez pochodną w punkcie A będziemy rozumieć gradient $\text{grad } f(A)$ (gdy warunki (a) i (b) są spełnione).

Zamiast mówić: funkcja ma pochodną w punkcie A można użyć terminu: funkcja f jest różniczkowalna w punkcie A .

Zastosowanie do obliczeń przybliżonych

Niech $f(x, y) = xy^2 + 2y^3$. Mamy

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y^2, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2xy + 6y^2.$$

Dla $A = (1, 1)$ i $X = (1, 1; 1, 2)$

$$\begin{aligned} 1,1 \cdot 1,2^2 + 2 \cdot 1,2^3 &= f(X) \approx f(A) + \text{grad } f(A) \circ (X - A) = \\ &= 3 + (1, 8) \circ (0, 1; 0, 2) = 3 + 0,1 + 1,6 = 4,7. \end{aligned}$$

Wyrażenie postaci $\text{grad } f(A_0) \circ h$, gdzie $h = (h_1, \dots, h_n)$ jest wektorem o współrzędnych różnych od zera, nazywamy różniczką funkcji f w punkcie $A_0 \in \mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$.

Niektórzy autorzy: różniczką (pochodną zupełną) to przekształcenie, które przyporządkowuje wektorowi h iloczyn skalarny $\text{grad } f(A_0) \circ h$.

Pochodna kierunkowa

Wersorem będziemy nazywać wektor o długości 1.

Definicja 27

Niech f będzie funkcją określoną na obszarze $D \subset \mathbb{R}^2$. Pochodną kierunkową funkcji f w punkcie (x_0, y_0) w kierunku wersora $v = (\alpha, \beta)$ określamy wzorem

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x_0, y_0) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + \alpha t, y_0 + \beta t) - f(x_0, y_0)}{t}.$$

Pochodną kierunkową funkcji n zmiennych, $n > 2$, definiujemy analogicznie.

Gradient — interpretacje geometryczne

Twierdzenie 8

Niech $f(x, y)$ będzie funkcją określoną na otoczeniu punktu (x_0, y_0) o promieniu $r > 0$. Załóżmy, że $\text{grad}(x_0, y_0) \neq 0$. Wówczas gradient wskazuje na kierunek najszybszego wzrostu, a jego długość określa bezwzględną wartość tej zmiany.

Dowód. M. Zakrzewski, Markowe wykłady z matematyki. Analiza, geometria i świat fizyczny. GiS 2017, str. 26–27.

Płaszczyzna styczna

Niech f będzie funkcją klasy $C^{(1)}$ w otoczeniu punktu (x_0, y_0) o promieniu $r > 0$. Płaszczyzna styczna do wykresu funkcji f w punkcie $(x_0, y_0, (x_0, y_0, f(x_0, y_0)))$ ma równanie postaci

$$z - f(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0).$$

Przykład Płaszczyzna styczna do wykresu funkcji $f(x, y) = 1 - x^2 - y^2$ w punkcie $(2, 1, f(2, 1))$ ma równanie

$$z - (1 - 4 - 1) = (-4)(x - 2) + (-2)(y - 1)$$

lub

$$z = -4x - 2y + 6.$$

Odpowiednie równanie i szkice wykresów można otrzymać wydając polecenie Wolfram Alpha:

```
tangent plane to 1-x^2-y^2 at (2,1)
```

Definicja 28

Mówimy, że funkcja $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, gdzie $D \subset \mathbb{R}^m$, ma w punkcie $A \in D$ maksimum lokalne, jeżeli istnieje $O(A, r)$ takie, że $O(A, r) \subset D$ i dla każdego $x \in O(A, r)$

$$f(x) \leq f(A). \quad (15)$$

- ▶ Jeżeli w warunku (15) zamienimy nierówność słabą „ $\leq$ ” na nierówność ostrą „ $<$ ”, otrzymamy definicję maksimum lokalnego właściwego.
- ▶ Jeżeli w warunku (15) zamienimy nierówność słabą „ $\leq$ ” na nierówność „ $\geq$ ”, otrzymamy definicję minimum lokalnego.
- ▶ Jeżeli w warunku (15) zamienimy nierówność słabą „ $\leq$ ” na nierówność „ $<$ ”, otrzymamy definicję minimum lokalnego właściwego.

Gdy funkcja f ma w punkcie A maksimum lokalne lub minimum lokalne, to mówimy, że ma w A ekstremum lokalne.

Pojęcie punktu stacjonarnego

Definicja 29

Niech $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, gdzie $D \subset \mathbb{R}^m$. Mówimy, że punkt $A \in D$ jest punktem stacjonarnym funkcji f , jeżeli

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(A) = \frac{\partial f}{\partial x_2}(A) = \dots = \frac{\partial f}{\partial x_m}(A) = 0.$$

Definicja 30

Niech $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, gdzie $D \subset \mathbb{R}^m$. Jeżeli f ma ekstremum lokalne w punkcie A i istnieją pochodne cząstkowe

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(A), \frac{\partial f}{\partial x_2}(A), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_m}(A),$$

to A jest punktem stacjonarnym funkcji f .

Funkcja $f(x_1, \dots, x_m)$ może mieć ekstrema lokalne tylko w punktach stacjonarnych lub w punktach, dla których nie istnieje co najmniej jedna z pochodnych cząstkowych pierwszego rzędu tej funkcji.

Przykład 4

Można sprawdzić, że punkt $(0, 0)$ jest punktem stacjonarnym funkcji $f(x, y) = x^2 - y^2$, ale funkcja ta nie ma ekstremum lokalnego w tym punkcie: dla dowolnego $r > 0$ mamy

$$f(0, r/2) < f(0, 0) = 0 < f(r/2, 0).$$

Punkty stacjonarne, w których funkcja nie ma ekstremum nazywane są punktami siodłowymi (od kształtu wykresów funkcji, dla których takie punkty istnieją).

Definicja 31

Niech funkcja f ma wszystkie pochodne cząstkowe rzędu drugiego w punkcie A . Macierz

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(A) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(A) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(A) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(A) \end{pmatrix}$$

będziemy nazywać macierzą Hessego dla funkcji f i punktu A i oznaczać $M_H(A)$ a jej wyznacznik przez $H(A)$.

Twierdzenie 9

Załóżmy, że $A = (x_0, y_0)$ będzie punktem stacjonarnym funkcji $f(x, y)$ oraz że istnieje $r > 0$ takie, że funkcja ta ma ciągle wszystkie pochodne rzędu drugiego na $O(A, r)$.

Wtedy:

1. Jeżeli $H(A) < 0$, to funkcja nie ma ekstremum lokalnego w punkcie A ;
2. Jeżeli $H(A) > 0$, to funkcja ma ekstremum lokalne w punkcie A :
 - 2.1 jeżeli $f_{xx}(A) > 0$, to f ma właściwe minimum lokalne w A ;
 - 2.2 jeżeli $f_{xx}(A) < 0$, to f ma właściwe maksimum lokalne w A .

Dowód można otrzymać wykorzystując dwuwymiarowy odpowiednik twierdzenia Taylora dla $n = 2$, które głosi, że wartość funkcji dwóch zmiennych f w punkcie $p \in O(A, r)$ może być przedstawiona w postaci

$$f(p) = f(A) + f_x(A)h + f_y(A)k + \frac{1}{2}(f_{xx}h^2 + 2f_{xy}hk + f_{yy}k^2),$$

gdzie $p = (x_0 + h, y_0 + k)$ i drugie pochodne są obliczone w pewnym punkcie

$p_\theta = (x_0 + \theta h, y_0 + \theta k)$, $0 < \theta < 1$;

Jeżeli założymy, że $p \in O(A, r)$ dla r dostatecznie małego,

$H(p_\theta)$ ma taki znak jak $H(A)$ i $f_{xx}(p_0)$ ma taki sam znak, jak $f_{xx}(A)$ (wynika to z założenia o ciągłości drugich pochodnych funkcji f na $O(A, r)$).

Teza twierdzenia wynika z przedstawienia wielomianu $f_{xx}(A)h^2 + 2f_{xy}(A)hk + f_{yy}(A)k^2$ zmiennych h i k w postaci kanonicznej — por. rozdz. III książki H. Marcinkowskiej „Analiza Matematyczna II”, str. 50-52:

Przykład

Niech funkcja f będzie określona wzorem

$$f(x, y) = x^2 + 6x + y^2 - 8y.$$

Mamy

$$f_x(x, y) = 2x + 6, \quad f_y(x, y) = 2y - 8.$$

Funkcja f ma więc jeden punkt stacjonarny w $A = (-3, 4)$.

Ponieważ

$$f_{xx}(x, y) = 2, \quad f_{xy}(x, y) = f_{yx}(y, x) = 0, \quad f_{yy}(x, y) = 2$$

dla $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ i

$$M_H(A) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad H(A) = 4 > 0,$$

gdzie $A = (-3, 4)$, więc funkcja ma w punkcie A minimum lokalne właściwe.

Przykład: iloczyn liczb dodatnich o ustalonej sumie

Jesteśmy zainteresowani wyznaczeniem największej wartości iloczynu xyz trzech liczb dodatnich, których suma $x + y + z = 6$.

Niech $f(x, y) = xy(6 - x - y)$. Mamy

$$f_x(x, y) = y(6 - 2x - y), \quad f_y(x, y) = x(6 - x - 2y).$$

Jeżeli $A = (x, y)$ o współrzędnych dodatnich jest punktem stacjonarnym, to

$$2x + y = 6$$

$$x + 2y = 6,$$

skąd: $3x + 3y = 12$ więc $x + y = 4$ i $x = 2, y = 2$. Ponieważ

$$f_{xx}(x, y) = -2y, \quad f_{xy}(x, y) = f_{yx}(y, x) = 6 - 2x - 2y, \quad f_{yy}(x, y) = -2x$$

dla $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ i

$$M_H(A) = \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}, \quad H(A) = 12 > 0,$$

gdzie $A = (2, 2)$, więc funkcja ma w punkcie A maksimum lokalne właściwe. W tym punkcie funkcja ma również maksimum globalne, co wynika z następującego twierdzenia Weierstrassa.

Twierdzenie Weierstrassa

Twierdzenie 10

Jeżeli funkcja $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ jest ciągła oraz zbiór $D \subset \mathbb{R}^m$ jest niepusty, domknięty i ograniczony, to w zbiorze tym istnieją punkty P_1, P_2 takie, że dla dowolnego punktu P zbioru D zachodzą nierówności:

$$f(P_1) \leq f(P) \leq f(P_2). \quad (16)$$

Uwaga terminologiczna Nierówność (16) można „odczytać” następująco: funkcja f ma minimum globalne $f(P_1)$ osiąganę w punkcie P_1 i maksimum globalne $f(P_2)$ osiąganę w punkcie P_2 .
Ekstremum globalne f : minimum globalne f lub maksimum globalne f .

Przykład: iloczyn liczb dodatnich o ustalonej sumie — c.d.

Przykład 5

Funkcja $f(x, y) = xy(6 - x - y)$ osiąga wartości: minimalną i maksymalną na zbiorze

$$D = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 6, \quad 0 \leq y \leq 6 \quad i \quad x + y \leq 6\}.$$

Wartość minimalna (minimum globalne) jest osiągane w punktach brzegowych trójkąta D , tj. w punktach $(x, y) \in D$ takich, że

$$x = 0, \quad y = 0 \quad \text{lub} \quad x + y = 6.$$

Dla dowolnego punktu $(x, y) \in \text{Int } D$ prawdziwa jest nierówność $f(x, y) > 0$. Z twierdzenia Weierstrassa wynika, że istnieje punkt $A_0 = (x_0, y_0) \in \text{Int } D$, w którym funkcja f osiąga maksimum globalne. Punkt ten jest również maksimum lokalnym tej funkcji. Wynika stąd, że f osiąga maksimum globalne w $A = (2, 2)$.

Metoda wyznaczania ekstremów globalnych

Niech f będzie funkcją ciągłą na obszarze domkniętym i ograniczonym D . Poszukiwanie ekstremów może (w wielu praktycznych przypadkach) być przeprowadzone zgodnie ze schematem:

- ▶ Na obszarze otwartym $\text{Int } D$ szukamy punktów, w których f może mieć ekstrema lokalne.
- ▶ Na brzegu D szukamy punktów, w których f ma ekstrema warunkowe (warunkiem jest należące do brzegu D).
- ▶ Porównujemy wartości funkcji w wyznaczonych punktach i na tej podstawie wyznaczamy ekstrema globalne wyznaczając punkty stacjonarne.