

Funkcje wymierne

dr Mariusz Grządział

Katedra Matematyki, Uniwersytet Przyrodniczy we Wrocławiu

semestr zimowy, rok akademicki 2022/2023

Całkowanie wielomianów i funkcji wymiernych

$$\int (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n) dx = a_0 x + a_1 \frac{x^2}{2} + \dots + a_n \frac{x^{n+1}}{n+1} + C.$$

Funkcję $W(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ nazywamy funkcją wymierną, jeżeli $P(x)$ i $Q(x)$ są wielomianami dowolnego stopnia.

Całki funkcji wymiernej nie da się wyrazić za pomocą operacji na wielomianach.

Przypomnijmy:

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + C, \quad \int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctg x + C.$$

Uwaga 1

Wszystkie wzory dla całek nieoznaczonych w naszym kursie są prawdziwe w każdym przedziale ciągłości odpowiedniej funkcji podcałkowej.

Funkcje dwóch zmiennych

Definicja 1

Niech X będzie zbiorem par uporządkowanych (x_1, x_2) , $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$. Odwzorowanie, które każdemu elementowi zbioru X przyporządkowuje dokładnie jeden element ze zbioru Y będziemy nazywać funkcją określoną na zbiorze X o wartościach w zbiorze Y .

Jeżeli $Y \subset \mathbb{R}$, to funkcję określoną w definicji będziemy nazywać funkcją rzeczywistą dwóch zmiennych.

Konwencja notacyjna: zamiast $f((x_1, x_2))$ zazwyczaj piszemy $f(x_1, x_2)$.

Całkowanie wielomianów i funkcji wymiernych -c.d.

Wielomianem zmiennych x_1 i x_2 stopnia 2-go nazywamy funkcję

$$P(x_1, x_2) = ax_1^2 + bx_2^2 + cx_1x_2 + dx_1 + ex_2 + f,$$

gdzie a, b, c, d, e i f są liczbami rzeczywistymi.

W podobny sposób definiujemy wielomiany stopnia 2-go dla większej liczby zmiennych a także wielomiany wyższych stopni dla liczby zmiennych większej niż 2.

Przykłady Wielomianami stopnia 2-go zmiennych x_1 i x_2 są

$$W_1(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2^2; \quad W_2(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 + 2x_1 + 3x_2 + 7.$$

Wielomiany dwóch zmiennych stopnia większego niż 2

Jednomian zmiennych x_1 i x_2 : iloczyn $cx_1^a x_2^b$, gdzie c jest liczbą rzeczywistą, a i b są liczbami całkowitymi nieujemnymi; stopień jednomianu jest równy $a + b$, c jest współczynnikiem jednomianu.

Wielomian określamy jako sumę jednomianów; stopniem wielomianu będziemy nazywać największy stopień jednomianu o niezerowym współczynniku będącego składnikiem tego wielomianu.

Przykład Wielomianami stopnia 3-go zmiennych x_1 i x_2 są

$$W_3(x_1, x_2) = x_1^2 x_2 + 2x_1 + 3x_2; \quad W_4(x_1, x_2) = x_1^3 + 2x_2^3 + 7x_1 x_2 + 3x_2.$$

Całkowanie wielomianów i funkcji wymiernych -c.d.

Definicja 2

Funkcją wymierną dwóch zmiennych będziemy nazywać funkcję postaci

$$R(x_1, x_2) = \frac{P(x_1, x_2)}{Q(x_1, x_2)},$$

gdzie $P(x_1, x_2)$ i $Q(x_1, x_2)$ są wielomianami zmiennych x_1 i x_2 .

Przykłady

$$R_1(x_1, x_2) = \frac{x_1^2 - x_2^2}{x_1^2 + 2x_2^2}, \quad R_2(x_1, x_2) = \frac{x_1^4 + x_2^2 - 3x_1}{x_1^2 + 2x_2^2}.$$

Funkcja

$$f(t) = R(\sin t, \cos t), \quad (1)$$

gdzie R jest funkcją wymierną dwóch zmiennych, jest funkcją jednej zmiennej.

Całkowanie funkcji wymiernych i funkcji postaci (1) wymaga użycia:

- ▶ metod algebraicznych takich rozkład na ułamki proste;
- ▶ poznanych metod całkowania (całkowanie przez podstawienie, itd.)

-por. skrypt K. Noska i T. Drwięgi „Całka nieoznaczona”, który jest dostępny na stronie AGH.

Całkowanie funkcji wymiernych przy użyciu pakietu Maxima— przykład

Całkę

$$\int \frac{1+x}{x^3-1} dx$$

można obliczyć wykorzystując pakiet Maxima wydając polecenie:

```
integrate((1+x)/(x^3-1), x), logabs=true;
```

Otrzymany wynik:

$$\frac{2 \log |x-1|}{3} - \frac{\log |x^2+x+1|}{3} + C$$