

Metody przybliżone obliczania całek

dr Mariusz Grządział

Katedra Matematyki, Uniwersytet Przyrodniczy we Wrocławiu

semestr zimowy, rok akademicki 2022/2023

Obliczanie całek oznaczonych

Całkę oznaczoną Riemanna można obliczać:

- ▶ z definicji, jako granicę sum Riemanna;
- ▶ przy użyciu metod przybliżonych:
 - ▶ obliczając odpowiednio dobraną sumę Riemanna;
 - ▶ obliczając średnie ważone sum Riemanna (metoda trapezów, Simpsona, Boole'a i inne).
 - ▶ bardziej złożone metody numeryczne obliczania całek oznaczonych (np. metoda Romberga);
- ▶ Obliczając całkę nieoznaczoną funkcji podcałkowej i korzystając z twierdzenia Newtona-Leibniza
 - ▶ wykonując rachunki „ręcznie” (z pomocą kalkulatora);
 - ▶ korzystając z systemów typu CAS (Computer Algebra System): Maxima, Mathematica i innych; WolframAlpha-strona (serwis) wykorzystująca system Mathematica.

Średnia ważona

Średnią ważoną liczb rzeczywistych $x_1, x_2, \dots, x_n$ z wagami $w_1, w_2, \dots, w_n$, gdzie $w_k > 0, k = 1, \dots, n$, określamy wzorem

$$x_w = \frac{w_1 x_1 + w_2 x_2 + \dots + w_n x_n}{w_1 + w_2 + \dots + w_n}.$$

Przykład

Chcemy obliczyć całkę

$$\int_0^1 \sin(\sin x) dx.$$

Próbując obliczyć tę całkę przy użyciu polecenia WolframAlpha

integrate sin (sin x) dx

otrzymujemy odpowiedź:

no result found in terms of standard mathematical functions

czyli: nie znaleziono wyniku wyrażonego przy użyciu

standardowych funkcji matematycznych

innymi słowy: nie znaleziono funkcji elementarnej która byłaby

funkcją pierwotną dla funkcji podcałkowej (na przedziale
równym prostej rzeczywistej).

Przykład — c.d

Wydając polecenie systemowi WA (Wolfram Alpha)

left endpoint method integral sin (sin x) from 0 to 1 with 10 intervals

otrzymujemy wynik:

<i>method</i>	<i>result</i>
<i>left endpoint</i>	0.392791
<i>right endpoint</i>	0.467354
<i>midpoint</i>	0.430873
<i>trapezoidal rule</i>	0.430072
<i>Simpson's rule</i>	0.430606
<i>Boole's rule</i>	0.430606

W poleceniu zapytaliśmy WA o wartość sumy L_{10} dla całki $\int_0^1 f(x) = \sin(\sin x) dx$ i liczby $n = 10$ (sumy Riemanna obliczonej dla punktów pośrednich leżących w lewych końcach przedziałów, na które dzielimy odcinek $[0, 1]$). Jest ona równa 0,392791. System WA podaje nam również wartości $R_{10} = 0,467354$ („right endpoint” — sumy obliczonej dla wartości funkcji podcałkowej w prawych końcach przedziałów, na które dzielimy odcinek $[0, 1]$), wartość analogicznej sumy $M_{10} = 0,430873$, obliczonej dla wartości funkcji podcałkowej w środkowych punktach przedziałów, $T_{10} = \frac{L_{10} + R_{10}}{2} = 0,430072$ („trapezoidal Rule” — przybliżenia całki otrzymanego przy użyciu reguły metody (reguły) trapezów); T_{10} może być interpretowane jako suma pól odpowiednich 10 trapezów; $S_{10} = \frac{2M_{10} + T_{10}}{3} = 0,430606$ („Simpson's rule”) i $S_{10} = 0,430072$ (Boole's rule); zarówno S_{10} jak i B_{10} są średnimi ważonym odpowiednich sum Riemanna. Przesłanki teoretyczne sugerują, że B_{10} jest najlepszym przybliżeniem dokładnej wartości rozważanej całki. Równość $S_{10} = B_{10}$ może sugerować, że dokładna wartość całki jest bardzo bliska 0,430606.

Całka oznaczona

$$\int_0^1 \sin(\sin x) dx.$$

obliczona przy użyciu polecenia WA
integrate sin (sin x) dx from 0 to 1
jest równa

0,4306061031...

więc widzimy, że S_{10} i B_{10} przybliżają dokładną wartość całki z dokładnością do 6 miejsc po przecinku. Użycie metody z pakietu *quadpack* w programie Maxima daje podobne wyniki.

Metoda tradycyjna: wymaga obliczenia całki nieoznaczonej.
Podane zostały całki podstawowych funkcji elementarnych oraz podstawowe wzory pozwalające na ich obliczanie.
Techniki: całkowanie przez części i całkowanie przez podstawienie wymagają dokładniejszego omówienia.