

Równania różniczkowe zwyczajne — część 1

dr Mariusz Grządziel

Katedra Matematyki, Uniwersytet Przyrodniczy we Wrocławiu

rok akademicki 2022/2023

Wzrost wykładniczy- przykład

Założmy, że na początku eksperymentu liczebność kultury bakterii $P(0)$ jest równa 10000. Przyjmujemy, że liczebność bakterii podwaja się po upływie 20 minut oraz że wzrost populacji jest wykładniczy:

$$\begin{aligned}P(t + 20) &= 2P(t), t \geq 0, \\P(t) &= 10000a^t = 10000e^{\ln at} = 10000e^{bt},\end{aligned}$$

gdzie $1 \neq a > 0$ i $b = \ln a$.

Chcemy znaleźć:

- (i) prędkość zmiany liczebności bakterii dla $t = 10$, $t = 30$ i $t = 50$ [min];
- (ii) liczebność populacji dla wartości zmiennej t z (i).

Wzrost populacji — c.d.

$$P(20) = 10000e^{20b} = 20000$$

skąd

$$e^{20b} = 2,$$

$$b = \ln 2 / 20 = 0,034.$$

Pochodna $P'(t)$ na $\mathbb{R}$ jest równa:

$$P'(t) = b \cdot 10000e^{tb} = 0,034 \cdot 10000e^{0,034t}.$$

Wzrost populacji — c.d.

Stąd:

$$P'(10) = 0,034 \cdot 10000e^{0,034 \cdot 10} = 477,682;$$

$$P(10) = 10000e^{0,034 \cdot 10} = 14049,48.$$

oraz

$$P'(30) = 0,034 \cdot 10000e^{0,034 \cdot 30} = 942,886;$$

$$P(30) = 10000e^{0,034 \cdot 30} = 27731,95$$

i

$$P'(50) = 0,034 \cdot 10000e^{0,034 \cdot 50} = 1861,142;$$

$$P(50) = 10000e^{0,034 \cdot 50} = 54739,47.$$

Równania różniczkowe

Dlaczego mogliśmy założyć w Przykładzie 1, że liczebność bakterii rośnie wykładniczo? Wynika to stąd, że prędkość wzrostu populacji jest proporcjonalna do liczebności bakterii w danej chwili:

$$P'(t) = kP(t), k \geq 0. \quad (1)$$

Równanie (1) jest przykładem równania różniczkowego. Można sprawdzić, że ma rozwiązania postaci:

$$P(t) = Ce^{kt}, C \in \mathbb{R}. \quad (2)$$

Z teorii równań różniczkowych wynika, że wszystkie rozwiązania równania (1) mają postać (2). Dokładnie jedno z tych rozwiązań spełnia tzw. warunek początkowy:

$$P(0) = 10000.$$

Stąd wynika, że $P(t) = 10000e^{kt}$.

Równania różniczkowe pierwszego rzędu

Definicja 1

Równanie postaci

$$y' = f(t, y), \quad (3)$$

będziemy nazywać równaniem różniczkowym pierwszego rzędu w postaci normalnej, gdzie $y = y(t)$ jest funkcją zmiennej t .

Definicja 2

Równanie (3) z warunkiem

$$y(t_0) = y_0$$

będziemy nazywać zagadnieniem początkowym.

Przy pewnych, w zagadnieniach praktycznych zazwyczaj spełnionych, założeniach zagadnienie początkowe ma dokładnie jedno rozwiązanie.

Rozwiązanie równania różniczkowego i zagadnienia początkowego

Definicja 3

Funkcję $y(t)$ będziemy nazywać rozwiązaniem równania różniczkowego pierwszego rzędu (3) na przedziale (a, b) , jeżeli

$$y' = f(t, y(t)) \text{ na przedziale } (a, b).$$

Wykres rozwiązania równania różniczkowego będziemy nazywać krzywą całkową.

Definicja 4

Funkcję $y(t)$ będziemy nazywać rozwiązaniem zagadnienia początkowego, jeżeli jest rozwiązaniem równania (3) na pewnym przedziale zawierającym t_0 oraz

$$y(t_0) = y_0.$$

Przykład

Równanie różniczkowe $y' = 1$ ma rozwiązanie ogólne postaci

$$y = x + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

na przedziale $I = (-\infty, \infty)$.

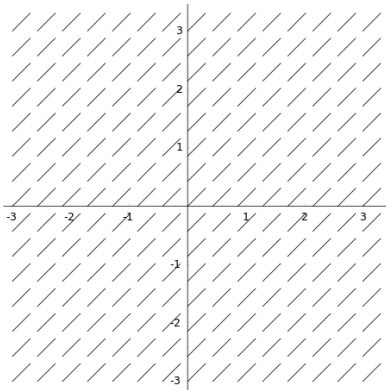
Pole kierunków

Polem kierunków będziemy nazywać zbiór odcinków, będących podzbiorami stycznych do rozwiązań danego równania różniczkowego; odcinki te zawierają punkty styczności (należące do wykresu rozwiązania — krzywej całkowej), dla których odpowiadające im styczne zostały wyznaczone. Rysunki, które zostaną przedstawione na kolejnych 6 slajdach, pochodzą z rozdziału e-podręcznika „Ordinary Differential Equations” pod tytułem „Graphing 1”;

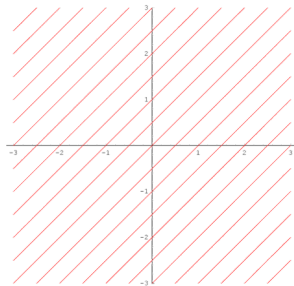
https://en.wikibooks.org/wiki/Ordinary_Differential_Equations/Graphing_1

udostępnionego na licencji: Creative Commons Attribution-ShareAlike License.

Wykład ten też jest udostępniany na tej licencji.



Rysunek: Pole kierunków dla równania $y' = 1$



Rysunek: Kilka rozwiązań równania $y' = 1$

Rozwiązanie ogólne równania ma postać

$$y = t + C, \quad C \in \mathbb{R}. \quad (4)$$

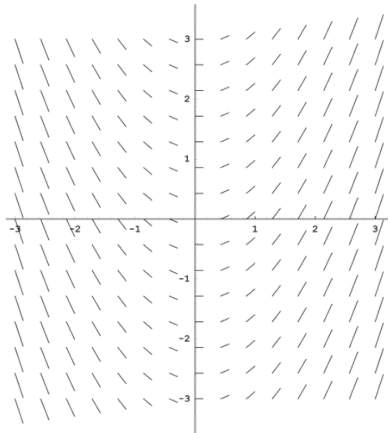
Pole kierunków — zastosowania

Mając naszkicowane pole kierunków dla równania

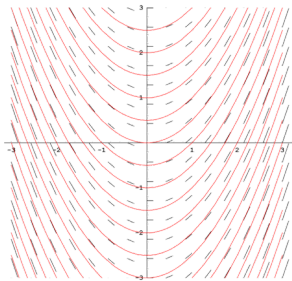
$$y'(t) = f(y, t) \quad (5)$$

możemy wyznaczyć przybliżone wartości pochodnej funkcji będącej rozwiązaniem tego równania dla odpowiednio dobranej sekwencji punktów.

Ten graficzny sposób wyznaczania przybliżonego rozwiązania może się okazać szczególnie przydatny w przypadku, gdy nie znamy analitycznego rozwiązania równania (5).



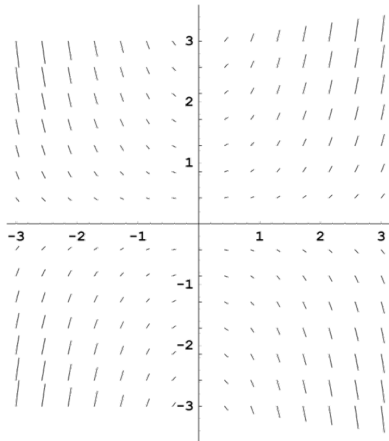
Rysunek: Pole kierunków dla równania $y' = t$



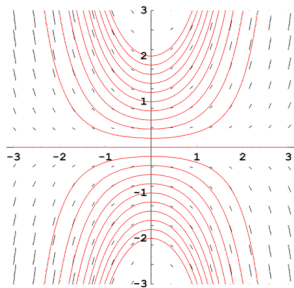
Rysunek: Pole kierunków dla równania $y' = t$ + kilka krzywych całkowych

Postać ogólna rozwiązania

$$y(t) = \frac{t^2}{2} + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$



Rysunek: Pole kierunków dla równania $y' = ty$



Rysunek: Pole kierunków dla równania $y' = ty$ + kilka krzywych całkowych

Postać ogólna rozwiązania

$$y(t) = Ce^{t^2/2}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Przykład– ciągła kapitalizacja odsetek

Bank B prowadzi konto a'vista z ciągłą kapitalizacją odsetek. Można pokazać, że $K(t)$, kapitał w chwili t , zdeponowany w tym banku spełnia równanie:

$$K'(t) = rK(t),$$

gdzie $r > 0$ jest pewną stałą („roczną stopą procentową”); czas t jest liczony w latach. Zakładamy, że w czasie $t = 0$ kapitał jest równy K_0 .

Ciągła kapitalizacja odsetek—c.d.

Przy kapitalizacji rocznej, po t latach, kapitał urósłby do wartości

$$K_0(1 + r)^t$$

Jeśli kapitalizacja następowałaby n razy w roku, to po t latach kapitał byłby równy

$$K_0 \left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}. \quad (6)$$

Przechodząc z n do ∞ (co odpowiadałoby ciągłej kapitalizacji) otrzymujemy:

$$K(t) = K_0 e^{rt}.$$

Funkcja K jest rozwiązaniem zagadnienia początkowego:

$$K'(t) = rK(t), \quad K(0) = K_0.$$

Równania różniczkowe o zmiennych rozdzielonych

Definicja 5

Równanie różniczkowe, które można przedstawić w postaci:

$$y' = g(t)h(y) \quad (7)$$

będziemy nazywać równaniem o zmiennych rozdzielonych.

Jeżeli $g(t)$ i $h(y)$ są ciągłe, $h(y) \neq 0$, to rozwiązanie (7) otrzymujemy znajdując rozwiązanie równania

$$\int \frac{1}{h(y)} dy = \int g(t) dt + C, \quad (8)$$

gdzie C jest dowolną stałą a całki w (8) rozumiemy są jako dowolne (aczkolwiek ustalone) funkcje pierwotne.

Uwaga 1

Jeżeli istnieje $y_0 \in \mathbb{R}$ taki, że $h(y_0) = 0$, to funkcja stała $y(t) = y_0$ jest jednym z rozwiązań równania (7).

Równania różniczkowe o zmiennych rozdzielonych— istnienie i jednoznaczność rozwiązania

Twierdzenie 1

Jeżeli

- ▶ *funkcja g jest ciągła na przedziale (a, b) ,*
- ▶ *funkcja h jest ciągła na przedziale (c, d) ,*
- ▶ *$h(y) \neq 0$ dla $y \in (c, d)$,*
- ▶ *$t_0 \in (a, b)$ oraz $y_0 \in (c, d)$,*

to dla zagadnienia początkowego

$$y' = g(t)h(y), \quad y(t_0) = y_0$$

istnieje dokładnie jedno rozwiązanie.

Ciągła kapitalizacja odsetek— c.d.

Równanie

$$K'(t) = rK(t), \quad (9)$$

można rozwiązać korzystając z metody „rozdzielania zmiennych”; otrzymujemy:

$$\int \frac{1}{K} dK = \int r dt,$$

skąd

$$\ln |K| = rt + C$$

i

$$|K| = e^C e^{rt} = C_1 e^{rt}, \quad C_1 = e^C > 0.$$

Funkcja stała $K(t) = 0$ jest rozwiązaniem równania (9), więc rozwiązanie ogólne tego równania można zapisać w postaci

$$K = De^{rt}, \quad D \in \mathbb{R}.$$

Jeśli określony jest warunek początkowy $K(0) = K_0$, to stała C_1 jest równa K_0 .

Przykład

Dla kapitału początkowego $K_0 = 1000$ i stopy oprocentowania 3 procent w skali rocznej, przy założeniu ciągłej kapitalizacji odsetek, zależność kapitału $K(t)$ od czasu t ma postać

$$K(t) = 1000e^{0,03t}.$$

Przy użyciu programu Wolfram Alpha można ten wynik uzyskać wydając polecenie

$$dy/dt=0.03 * y, \quad y(0)=1000$$

Wzrost populacji

Wzrost populacji: używając podobnych argumentów możemy uzasadnić, że $P(t)$, wielkość populacji bakterii z przykładu z początku wykładu, jest równa

$$P(t) = P_0 e^{kt}, \quad k > 0.$$

Dla danych liczbowych z początku wykładu: $P_0 = 10000$,
 $k = \ln 2/20 \approx 0,34$.

Przykład

Równanie $y' = ty$ jest równaniem o rozdzielonych zmiennych:

$$\int \frac{dy}{y} = \int t dt + C,$$

więc

$$\ln |y| = \frac{1}{2}t^2 + C,$$

$$|y| = e^{\frac{1}{2}t^2} \cdot e^C,$$

$$y = e^{\frac{1}{2}t^2} \cdot e^C \quad \text{lub} \quad y = -e^{\frac{1}{2}t^2} \cdot e^C,$$

więc ogólne rozwiązanie ma postać:

$$y = C_1 e^{\frac{1}{2}t^2}, \quad C_1 \in \mathbb{R}.$$

Wzrost populacji— funkcja logistyczna

Niech $N(t)$ — liczebność populacji bakterii; zakładamy, że

$$\frac{dN}{dt} = kN(a - N), \quad (10)$$

gdzie a i k są stałymi dodatnimi. Stała a może być interpretowana jako ograniczenie górne liczebności populacji, jeśli warunek początkowy ma postać $N(x_0) = N_0 < a$. Równanie (10) nazywane jest w literaturze *równaniem logistycznym*.

Wzrost populacji — funkcja logistyczna — c.d.

Zauważmy, że (10) jest równaniem o zmiennych rozdzielonych, gdzie $g(t) = k$ i

$$h(N) = N(a - N).$$

Mamy

$$\frac{1}{N(a - N)} = \frac{1}{a} \left(\frac{1}{N} + \frac{1}{N - a} \right)$$

(funkcje wymierną przedstawiamy jako sumę ułamków prostych).

Należy rozwiązać równanie

$$\int \frac{1}{a} \left(\frac{1}{N} + \frac{1}{N - a} \right) dN = -\frac{1}{a} \ln \left| \frac{N - a}{N} \right| = kt + C_1$$

skąd:

$$\ln \left| \frac{N - a}{N} \right| = -akt - aC_1$$

i

$$\left| \frac{N - a}{N} \right| = De^{-akt}, \quad D > 0.$$

Przypadek $0 < N < a$.

$$\frac{a}{N} - 1 = De^{-akt},$$

$$\frac{a}{N} = De^{-akt} + 1,$$

$$N = \frac{a}{1 + De^{-akt}}.$$

Ponieważ $N(0) = N_0 = \frac{a}{1+D}$, więc $1 + D = \frac{a}{N_0}$ i $D = \frac{a}{N_0} - 1$ i

$$N(t) = \frac{a}{1 + (\frac{a}{N_0} - 1)e^{-akt}}.$$

Przypadek $N > a$.

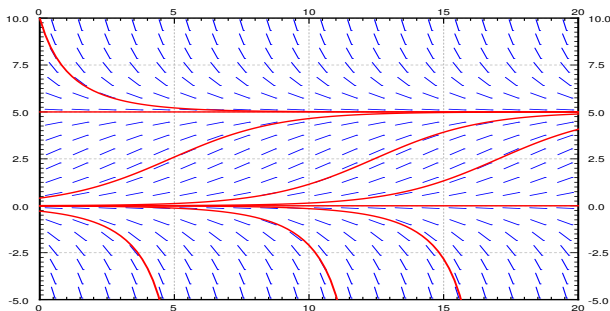
$$\begin{aligned}1 - \frac{a}{N} &= De^{-akt}, \\ -\frac{a}{N} &= De^{-akt} - 1, \\ N &= \frac{a}{1 - De^{-akt}}.\end{aligned}$$

Ponieważ $N(0) = N_0 = \frac{a}{1-D}$, więc $1 - D = \frac{a}{N_0}$ i $D = 1 - \frac{a}{N_0}$ i

$$N(t) = \frac{a}{1 + (\frac{a}{N_0} - 1)e^{-akt}}$$

Z twierdzenia o jednoznaczności rozwiązania równania o zmiennych rozdzielonych wynika, że wyznaczone zostały wszystkie interesujące nas rozwiązania równania logistycznego (dla wszystkich warunków początkowych postaci $N(0) = b$, gdzie b jest liczbą dodatnią różną od a).

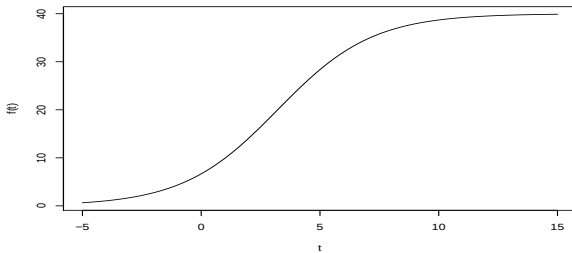
Funkcja logistyczna— wykres



Rysunek: Pole kierunków i kilka krzywych całkowych dla równania $y' = 0,1 \cdot y \cdot (5 - y)$.

Rysunek pochodzi z książki J. Lebla Notes on Diffy Qs. Differential Equations for Engineers, ze str. 51, dostępnej na stronie autora www.jirka.org, udostępnionej na licencji Creative Commons Attribution-Noncommercial-Share Alike 4.0

Funkcja logistyczna— wykres



Rysunek: Wykres funkcji logistycznej dla $a = 40$, $b = (\frac{a}{N_0} - 1) = 5$ i $c = ak = 0,5$.

Przypomnijmy: funkcja logistyczna określona jest wzorem

$$f(t) = \frac{a}{1 + be^{-ct}}, \quad a, b, c > 0.$$

Jeżeli $N_0 > a$, rozwiązanie równania logistycznego (10) jest funkcją malejącą.

Lektura uzupełniająca

M. Gewert, Z. Skoczylas, Równania różniczkowe zwyczajne, wyd. 15 Oficyna Wydawnicza GiS, Wrocław 2016.

J. Lebl, Notes on Diffy Qs. Differential Equations for Engineers. Createspace Independent Publishing Platform 2014. Książka dostępna na stronie autora

<https://www.jirka.org/diffyqs/>