

# Równania różniczkowe zwyczajne — część 2

dr Mariusz Grządziel

Katedra Zastosowań Matematyki, Uniwersytet Przyrodniczy we Wrocławiu

rok akademicki 2022/2023

W prezentacji wykorzystano fragmenty:  
e-podęcznika: W. Władimirow, J. Janus, Równania różniczkowe  
zwyczajne, AGH, e-book dostępny na stronie:  
<https://epodreczniki.open.agh.edu.pl>. e-book został  
udostępniony na licencji: Creative Commons Uznanie  
autorstwa – Na tych samych warunkach 3.0 Polska.

This work is dual licensed under the Creative Commons  
Attribution-Noncommercial-Share Alike 4.0 International  
License and the Creative Commons Attribution-Share Alike 4.0  
International License.

J. Lebl, Notes on Diffy Qs. Differential Equations for Engineers.  
Createspace Independent Publishing Platform 2014. Książka  
dostępna na stronie autora

<https://www.jirka.org/diffyqs/>

Udostępniona została na warunkach Creative Commons  
Attribution-Noncommercial-Share Alike 4.0  
Ta prezentacja została również udostępniona na warunkach  
wyżej wymienionych licencji.

Robert zaparzył filiżankę kawy. W chwili  $t = 0$  temperatura kawy była równa  $89^{\circ}\text{C}$  (jednostką pomiaru czasu jest w tym przykładzie minuta). W chwili  $t = 1$  temperatura kawy wynosiła  $85^{\circ}\text{C}$ . Robert chciałby zacząć picie kawy, gdy jej temperatura spadnie do  $60^{\circ}\text{C}$ . Temperatura w pomieszczeniu, w którym znajduje się Robert, jest równa  $22^{\circ}\text{C}$ . Kiedy Robert powinien zacząć picie kawy?

Oznaczmy:

- ▶  $T[^\circ\text{C}]$  : temperatura kawy;
- ▶  $A[^\circ\text{C}]$ : temperatura pomieszczenia;
- ▶  $t[\text{minuta}]$ : czas.

Zgodnie z prawem stygnięcia Newtona

$$\frac{dT}{dt} = k(A - T),$$

dla pewnej stałej  $k$ . W naszym przykładzie  $A = 22$ ,  $T(0) = 89$ ,  
 $T(1) = 85$ .

Mamy:

$$\frac{1}{T-A} dT = -k dt, \quad (\text{„rozdzielamy zmienne”})$$

$$\ln(T-A) = -kt + C, \quad (\text{zauważmy, że } T-A > 0)$$

$$T-A = D e^{-kt},$$

$$T = A + D e^{-kt}.$$

Z warunku:  $89 = T(0) = 22 + D$  otrzymujemy  $D = 67$ , więc

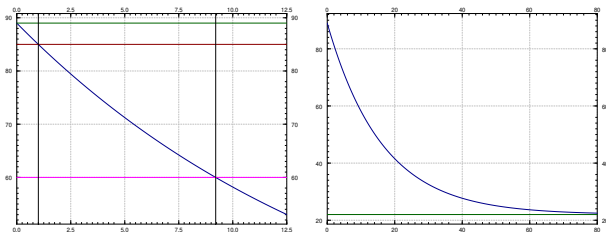
$$T = 22 + 67 e^{-kt}.$$

Z drugiego warunku:  $85 = T(1) = 22 + 67 e^{-k}$  i

$$k = -\ln \frac{85-22}{67} \approx 0.0616 \text{ skąd}$$

$$60 = 22 + 67 e^{-0.0616t}$$

$$\text{i } t = -\frac{\ln \frac{60-22}{67}}{0.0616} \approx 9.21 \text{ minut.}$$



**Rysunek:** Szkice wykresów temperatury kawy jako funkcji czasu.

Źródło: książka J. Lebla (cytowana w spisie literatury)

# Przykład

Wyznaczyć rozwiązanie ogólne równania

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{x+1}$$

i rozwiązanie szczególne spełniające warunek  $y(0) = 5$ .

Zauważmy, że funkcja stała  $y = 0$  określona na dziedzinie  $D_y = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$  jest rozwiązaniem tego równania.

Będziemy szukać innych rozwiązań przy założeniu, że  $x \neq -1$  i  $y \neq 0$ . Przy tych założeniach mamy

$$\begin{aligned}\frac{1}{y^2} dy &= \frac{1}{x+1} dx, \\ \int \frac{1}{y^2} dy &= \int \frac{1}{x+1} dx, \\ -\frac{1}{y} &= \ln|x+1| + C.\end{aligned}$$

Rozwiązanie ogólne ma więc postać

$$y = -\frac{1}{\ln|x+1| + C}.$$

Funkcja  $y = 0$  jest rozwiązaniem osobliwym. Stałą  $C$  wyznaczamy z równania

$$-\frac{1}{\ln|0+1| + C} = 5;$$

mamy więc  $C = -1/5$ ; szukanym rozwiązaniem szczególnym jest

$$y = -\frac{1}{\ln|x+1| - 1/5}.$$

# Równania jednorodne

## Definicja 1

*Równaniem jednorodnym nazywamy równanie, które może być zapisane postaci*

$$\frac{dy}{dt} = f\left(\frac{y}{t}\right), \quad t \neq 0.$$

Szukamy rozwiązania stosując podstawienie  $z = \frac{y}{t}$ . Wówczas  $y = z t$  i  $y' = t z' + z$ .

Otrzymamy równanie o zmiennych rozdzielonych

$$\frac{dz}{dt} = \frac{f(z) - z}{t}.$$

Przy założeniu, że  $f(z) - z \neq 0$  otrzymujemy  $\ln |t| + C = \int \frac{dz}{f(z) - z}$ .

# Równanie jednorodne — przykład

Znaleźć rozwiązanie ogólne równania

$$\frac{dy}{dt} = \frac{y}{t} \left( 1 + \frac{y}{t} \right)$$

Mamy  $f(z) = z(z + 1)$ , więc należy obliczyć całkę

$$\int \frac{dz}{f(z) - z} = \int \frac{dz}{z + z^2 - z} = -\frac{1}{z} + C.$$

Wracając do zmiennej wyjściowej otrzymamy równość

$$\frac{t}{y} = -\ln |t| - C, \text{ skąd}$$

$$y = \frac{t}{-\log |t| - C}.$$

Rozwiązaniem osobliwym jest  $y = 0$ ,  $x \neq 0$ ; odpowiada ono założeniu  $f(z) - z \neq 0$ , przy którym otrzymano rozwiązanie ogólne.

# Równania liniowe 1-go rzędu

Liniowym niejednorodnym równaniem różniczkowym rzędu pierwszego nazywamy równanie postaci

$$\frac{dy(t)}{dt} + p(t)y(t) = q(t), \quad (1)$$

gdzie  $p(t)$ ,  $q(t)$  są znanymi funkcjami, przy czym zakładamy że  $p$  i  $q$  są ciągłe na przedziale  $(a, b)$  oraz że  $q(t)$  nie równa się tożsamościowo zeru. Stowarzyszonym równaniem jednorodnym nazywamy równanie postaci

$$\frac{dy}{dt} + p(t)y = 0.$$

Po przemnożeniu tego równania przez  $\frac{dt}{y}$  otrzymujemy równanie o zmiennych rozdzielonych:  $\frac{dy}{y} = -p(t) dt$ .

Po scałkowaniu otrzymujemy  $y = C e^{-\int p(t) dt}$ ,  $C \in \mathbb{R}$ , gdzie całka jest rozumiana jako ustalona funkcja pierwotna.

Poszukujemy rozwiązania równania (1) w postaci

$$y(t) = C(t) e^{-F(t)},$$

gdzie  $F(t) = \int p(t) dt$ : dowolna, aczkolwiek ustalona funkcja pierwotna funkcji  $p$ .

Po podstawieniu do równania wyjściowego otrzymamy:

$$\frac{dC}{dt} = q(t) e^{F(t)} \quad \text{lub} \quad dC = q(t) e^{F(t)} dt. \quad \text{Zatem}$$

$C(t) = C_0 + \int q(t) e^{F(t)} dt$ . Stąd już łatwo można otrzymać postać rozwiązania ogólnego problemu niejednorodnego (1)

$$x(t) = e^{-F(t)} \left( C_0 + \int q(t) e^{F(t)} dt \right), \quad F(t) = \int p(t) dt.$$

Obie całki w powyższych równościach: dowolne, aczkolwiek ustalona funkcje pierwotne funkcji podcałkowych.

## Twierdzenie 1

*Jeżeli funkcje  $p$  i  $q$  są ciągłe przedziale  $(a, b)$ , to dla dowolnego  $t_0 \in (a, b)$  oraz  $y_0 \in \mathbb{R}$ , zagadnienie początkowe*

$$\frac{d y(t)}{d t} + p(t) y(t) = q(t), \quad y(t_0) = y_0 \quad (2)$$

*ma dokładnie jedno rozwiązanie. Rozwiązanie to jest określone na przedziale  $(a, b)$ .*

# Równania liniowe 1-go rzędu — przykład

Wyznaczyć rozwiązanie ogólne równania

$$\frac{dy}{dt} + y(t) = t.$$

## Rozwiązanie.

Z postaci równania:  $p(t) = 1$ ,  $q(t) = t$  (por. poprzednie dwa slajdy). Obliczamy:

$$\begin{aligned} F(t) &= \int p(t) dt \equiv \int dt = t, \\ \int e^{F(t)} q(t) dt &= \int e^t t dt = e^t (t - 1). \end{aligned}$$

Rozwiązanie ogólne równania więc postać:

$$y(t) = e^{-t}(C_0 + e^t(t - 1)).$$

# Równania różniczkowe zwyczajne rzędu $n \geq 1$

Równaniem różniczkowym zwyczajnym (RRZ) nazywamy równanie

$$F(t, y(t), y'(t), \dots, y^{(n)}(t)) = 0, \quad (3)$$

gdzie  $F$  jest funkcją różniczkowalną ze względu na każdy ze swoich argumentów. W równaniu tym niewiadomą jest  $n$ -krotnie różniczkowana funkcja  $y = y(t)$ , zatem równanie jest równaniem funkcyjnym. Jeżeli jesteśmy w stanie rozwiązać równanie względem ostatniej zmiennej, wówczas możemy go napisać w postaci równoważnej

$$y^{(n)} = \Psi(t, y(t), y'(t), \dots, y^{(n-1)}), \quad (4)$$

zwanej postacią kanoniczną skalarne RRZ  $n$ -tego rzędu.

## Definicja 2

*Rozwiązaniem szczególnym (całką szczególną) równania (3) na pewnym przedziale  $(a, b)$  nazywamy funkcję spełniającą to równanie w każdym punkcie tego przedziału.*

## Definicja 3

*Liczbę naturalną  $n$  nazywamy rzędem równania różniczkowego, jeżeli w równaniu tym występuje pochodna rzędu  $n$  i nie występuje pochodna rzędu wyższego niż  $n$ .*

# Równania różniczkowe zwyczajne rzędu $n \geq 1$ — c.d.

## Definicja 4

*Wykres szczególnego rozwiązania równania różniczkowego będziemy nazywać krzywą całkową.*

## Definicja 5

*Zagadnienie Cauchy'ego dla równania różniczkowego rzędu  $n$ : znaleźć rozwiązanie szczególne tego równania spełniające*

$$y(t_0) = y_0, y'(t_0) = y_1, \dots, y^{(n-1)}(t_0) = y_{n-1},$$

*gdzie  $t_0$  oraz  $y_0, y_1, \dots, y_{n-1}$  są danymi liczbami.*

$y_0, y_1, \dots, y_{n-1}$  — wartości początkowe.

## Przykład

Rozwiązać zagadnienie Cauchy'ego dla równania

$$y'' = 18t,$$

z warunkami początkowymi  $y(0) = 0$ ,  $y'(0) = 2$ .

Mamy

$$y' = \int 18t \, dt = 9t^2 + C_1,$$

$$y = \int (9t^2 + C_1) \, dt = 3t^3 + C_1 t + C_2.$$

Z warunków początkowych otrzymujemy:

$$9 \cdot 0 + C_1 = 2$$

$$0 + C_1 \cdot 0 + C_2 = 0.$$

Stąd  $C_1 = 2$ ,  $C_2 = 0$ ; szukane rozwiązanie szczególne ma postać:  $y = t^3 + 2t$ ; przedział, na którym określone jest rozwiązanie: dowolny przedział otwarty, do którego należy punkt 0.

## Definicja 6

Niech będą dane odcinki  $(a_1, b_1), (a_2, b_2), \dots, (a_n, b_n)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .  
Jeżeli dowolnemu układowi liczb  $(C_1, \dots, C_n) \in \mathbb{R}^n$  takiemu, że

$$C_i \in (a_i, b_i), \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

przyporządkowana jest dokładnie jedna krzywa całkowa równania różniczkowego rzędu  $n$ , to powiemy, że określona jest rodzina krzywych całkowych tego równania zależna od  $n$  parametrów  $(C_1, \dots, C_n)$ .

## Definicja 7

Całką ogólną równania różniczkowego rzędu  $n$  nazywamy każdą rodzinę krzywych całkowych tego równania zależną od  $n$  parametrów  $(C_1, \dots, C_n)$ ; zakładamy, że te krzywe całkowe są wykresami funkcji klasy  $C^{(n)}$ .

Definicja ta nawiązuje do definicji z książki F. Lei, rozdz. XIV paragraf 6.

# Przykład

Rodzina funkcji

$$y = C_1 \sin x + C_2 \cos x, \quad C_1 \in \mathbb{R}, C_2 \in \mathbb{R}$$

jest całką ogólną równania

$$y'' + y = 0. \tag{5}$$

Wszystkie rozwiązania (5) należą do tej rodziny. Dowód: skrypt E. Ferenstein i in., wykład XI, rozdział 1.

# Równania różniczkowe liniowe rzędu drugiego

Jest to równanie postaci

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = h(t), \quad a < t < b. \quad (6)$$

## Twierdzenie 2

*Jeżeli  $p$ ,  $q$  i  $h$  są funkcjami ciągłymi na przedziale  $(a, b)$ , to dla dowolnego  $t_0 \in (a, b)$  oraz  $y_0, y_1 \in \mathbb{R}$  zagadnienie początkowe ma dokładnie jedno rozwiązanie. Rozwiązanie to jest określone na przedziale  $(a, b)$ .*

# Jednorodne równania różniczkowe liniowe rzędu drugiego

Jest to równanie postaci

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = 0, \quad a < t < b. \quad (7)$$

# Jednorodne równania różniczkowe liniowe rzędu drugiego o stałych współczynnikach

## Definicja 8

Równanie

$$y'' + py' + qy = 0, \quad (\text{L2})$$

gdzie  $p$  oraz  $q$  są stałymi nazywamy równaniem liniowym jednorodnym rzędu drugiego o stałych współczynnikach.

Szukamy rozwiązań postaci  $y = e^{sx}$ ;  $s$  tak, aby równanie (L2) było spełnione.

Obliczając pochodne i podstawiając do równania otrzymujemy:

$$y'(x) = se^{sx}, \quad y''(x) = s^2 e^{sx}, \quad (8)$$

$$s^2 e^{sx} + pse^{sx} + qe^{sx} = 0, \quad (9)$$

$$s^2 + ps + q = 0. \quad (10)$$

## Definicja 9

Równanie  $s^2 + ps + q = 0$  będziemy nazywać równaniem charakterystycznym równania różniczkowego (L2).

Niech  $\Delta = p^2 - 4q$ : wyznacznik równania charakterystycznego.

1.  $\Delta > 0$ . Równanie ma dwa pierwiastki rzeczywiste  $s_1$  i  $s_2$ ;  
 $y_1 = e^{s_1 x}$  i  $y_2 = e^{s_2 x}$  są rozwiązaniami równania różniczkowego (L2). Całka ogólna ma postać:

$$y = C_1 e^{s_1 x} + C_2 e^{s_2 x}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}. \quad (11)$$

2.  $\Delta = 0$ . Równanie ma jeden pierwiastek rzeczywisty  $s_0$ .  
Oprócz  $y_1 = e^{s_0 x}$  rozwiązaniem jest (można sprawdzić)  
 $y_2 = x e^{s_0 x}$ ; całka ogólna jest

$$y = C_1 e^{s_0 x} + C_2 x e^{s_0 x}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}. \quad (12)$$

3.  $\Delta < 0$ . Równanie ma dwa pierwiastki zespolone:  
 $s_1 = \alpha + i\beta$  i  $s_2 = \alpha - i\beta$ . Można wykazać, że całka ogólna ma postać

$$y = e^{\alpha x} (C_1 \sin \beta x + C_2 \cos \beta x), \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Można pokazać, że wszystkie rozwiązania równania (L2) są tej postaci, por. [Leja (2008), rozdz. XIV, paragraf 27].

## Zastosowania do ruchu drgającego

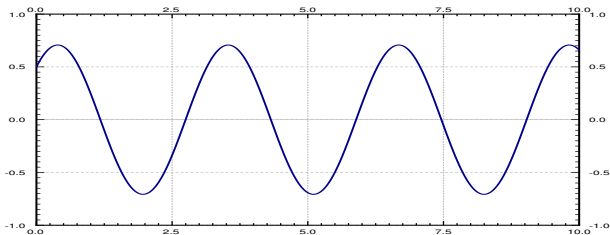
Równanie ruchu drgającego punktu materialnego poruszającego się po osi  $x$  pod działaniem siły sprężystej skierowanej ku punktowi  $x = 0$ :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + a^2x = 0.$$

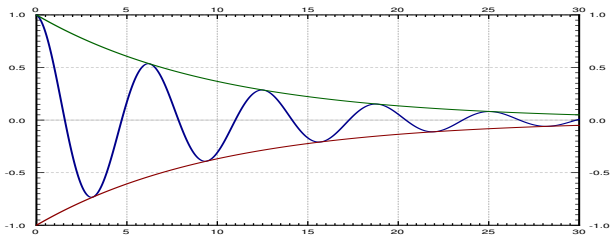
Jeżeli oprócz siły sprężystej działa siła hamująca, taka jak np. tarcie, proporcjonalna do prędkości  $dx/dt$ , to równanie ruchu przyjmie postać

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2b\frac{dx}{dt} + a^2x = 0.$$

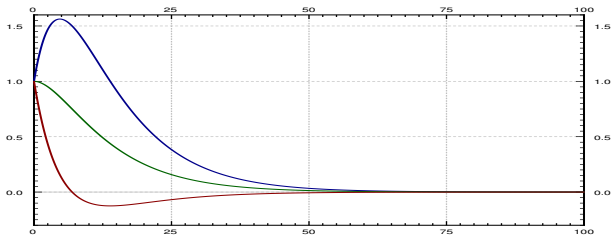
- ▶ jeżeli  $b \geq a$ : siła tłumiąca duża, ruch nie jest okresowy;
- ▶ jeżeli  $b < a$ : siła tłumiąca mała, drgania zanikające.



**Rysunek:** Drgania: brak siły tłumiącej; źródło: J. Lebl, Notes on Diffy Qs. Differential Equations for Engineers.



**Rysunek:** Drgania: siła tłumiąca mała, zanikająca; źródło: J. Lebl, Notes on Diffy Qs. Differential Equations for Engineers.



**Rysunek:** Drgania: siła tłumiąca duża; źródło: J. Lebl, Notes on Diffy Qs. Differential Equations for Engineers.

# Lektura uzupełniająca

M. Gewert, Z. Skoczylas, Równania różniczkowe zwyczajne, wyd. 15, Oficyna Wydawnicza GiS, Wrocław 2016.

J. Lebl, Notes on Diffy Qs. Differential Equations for Engineers. Createspace Independent Publishing Platform 2014. Książka dostępna na stronie autora

<https://www.jirka.org/diffyqs/>

Leja, F., Rachunek różniczkowy i całkowy. Wyd. 17, PWN 2012.