

Całka oznaczona Riemanna

rok akademicki 2022/2023; część prezentacji została
zaczerpnięta z podręcznika elektronicznego Witolda Majdaka
„Całka oznaczona”

Podręcznik elektroniczny Witolda Majdaka „Całka oznaczona”
można znaleźć na stronie

[epodreczniki.open.agh.edu.pl/
openagh-podreczniki_view.php?categId=4&handbookId=53](http://epodreczniki.open.agh.edu.pl/openagh-podreczniki_view.php?categId=4&handbookId=53)

Prezentacja, podobnie jak e-podręcznik W. Majdaka, udostępniany
jest na licencji Creative Commons CC BY-SA

Definicja 1

Założmy, że funkcja f jest ciągła na przedziale $[a, b]$. Całkę oznaczoną z funkcji ciągłej f na przedziale $[a, b]$ definiujemy wzorem

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f \left(a + (k-1) \frac{b-a}{n} \right) \right]. \quad (1)$$

Całka Riemanna

Niech f będzie funkcją określoną na przedziale $[a, b]$. Dla danego n naturalnego określamy:

$$\Delta x = (b - a)/n, \quad (2)$$

$$x_0 = a, x_1 = a + \Delta x, x_2 = a + 2\Delta x, \dots \quad (3)$$

$$x_{n-1} = a + (n - 1)\Delta x, x_n = a + (n - 1)\Delta x = b. \quad (4)$$

Niech x_1^* oznacza dowolny punkt należący do przedziału $[x_0, x_1]$, x_2^* dowolny punkt należący do przedziału $[x_1, x_2]$, ..., x_{n-1}^* dowolny punkt należący do przedziału $[x_{n-2}, x_{n-1}]$, x_n^* dowolny punkt należący do przedziału $[x_{n-1}, x_n]$. Całkę oznaczoną Riemanna funkcji f od a do b , oznaczaną symbolem $\int_a^b f(x)dx$, określamy wzorem

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i^*)\Delta x \quad (5)$$

pod warunkiem, że granica ta istnieje i ma taką samą wartość dla wszystkich wyborów punktów $x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*$. Jeżeli granica ta istnieje, to powiemy, że funkcja f jest całkowna na przedziale $[a, b]$.

Dla funkcji ciągłej na przedziale $[a, b]$ całka Riemanna określona wzorem (5) jest równa całce funkcji ciągłej na przedziale $[a, b]$ określonej wzorem (1) — użycie tego samego symbolu dla oznaczenia obu całek jest uzasadnione.

Uwaga 1

Przyjmujemy

$$\int_0^0 f(x)dx = 0 \quad i \quad \int_a^b f(x)dx = - \int_b^a f(x)dx \quad dla \quad a > b.$$

Sumy Riemanna

Suma

$$\sum_{i=1}^n f(x_i^*) \Delta x$$

jest nazywana sumą Riemanna. Całka oznaczona Riemanna może być przybliżona przez sumę Riemanna z zadaną dokładnością.

Przykład

Jesteśmy zainteresowani wyznaczeniem wartości całki

$$I = \int_0^1 x^2 dx$$

Zdefiniujmy dwa ciągi sum Riemanna: (L_n) i (R_n) wzorami:

$$L_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left(\frac{k-1}{n} \right)^2, R_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{n} \right)^2.$$

Mamy: $R_n - L_n = 1/n$.

Dla $n = 10$ prawdziwa jest nierówność

$$L_{10} = 0,285 \leq I \leq R_{10} = 0,385.$$

Zarówno L_{10} jak R_{10} przybliżają całkę I z dokładnością mniejszą lub równą 0,1.

Pokazaliśmy (na jednym z poprzednich wykładów), że $L_n \rightarrow \frac{1}{3}$ (obliczyliśmy wartość tej granicy). W podobny sposób można pokazać, że $R_n \rightarrow \frac{1}{3}$.

Wartość całki I można obliczyć korzystając z twierdzenia Newtona-Leibniza.

Metody obliczania całek Riemanna

- ▶ Obliczanie granicy ciągu sum Riemanna;
- ▶ wyznaczanie wartości przybliżonej — na przykład poprzez obliczenie odpowiedniej sumy Riemanna;
- ▶ wykorzystując twierdzenie Newtona-Leibniza (gdy funkcja podcałkowa jest ciągła).

Alternatywna definicja całki Riemanna— z użyciem podziałów, które niekoniecznie są równomierne

Jeżeli w definicji całki Riemanna odcinek $[a, b]$ dzielimy na przedziały o szerokościach $\Delta x_1, \dots, \Delta x_n$, niekoniecznie równych, to definiując całkę musimy zapewnić, że wszystkie te szerokości dążą do zera (por. wykład „Całka Riemanna” z poprzedniego semestru lub [Ste20], str. 307–308).

Całkowalność funkcji signum

Funkcje signum określamy wzorem:

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} -1, & \text{gdy } x < 0, \\ 0, & \text{gdy } x = 0, \\ 1, & \text{gdy } x > 0. \end{cases}$$

Fakt 1

Funkcja sgn jest całkowalna w sensie Riemanna na odcinku $[-1, 1]$.

Twierdzenie 1

Funkcja ograniczona mająca skończoną liczbę punktów nieciągłości na przedziale $[a, b]$ jest całkowalna w sensie Riemanna na tym odcinku.

Wniosek. Funkcja ciągła na przedziale $[a, b]$ jest całkowalna w sensie Riemanna na tym odcinku.

Funkcja Dirichleta

Funkcję Dirichleta $D : \mathbb{R} \mapsto \{0, 1\}$ określamy wzorem:

$$D(x) = \begin{cases} 1, & \text{gdy } x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & \text{gdy } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \end{cases}$$

Fakt 2

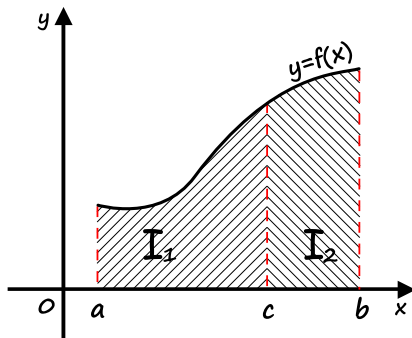
Funkcja Dirichleta D nie jest całkowna w sensie Riemanna na odcinku $[0, 1]$.

Twierdzenie 2

Funkcja całkowalna $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ jest całkowalna w każdym podprzedziale $[\alpha, \beta]$ przedziału $[a, b]$.

Twierdzenie 3

Jeżeli $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ jest funkcją całkowalną oraz $c \in (a, b)$, to zachodzi równość $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$.



Rysunek 4: $I_1 = \int_a^c f(x)dx$, $I_2 = \int_c^b f(x)dx$

Twierdzenie 4

Jeżeli funkcja f jest całkowalna na przedziale $[a, b]$, a funkcja g jest równa funkcji f na odcinku $[a, b]$ wszędzie z wyjątkiem skończonego wielu punktów, to funkcja g też jest całkowalna na $[a, b]$ i całki tych funkcji na tym przedziale są równe.

Przykład 1

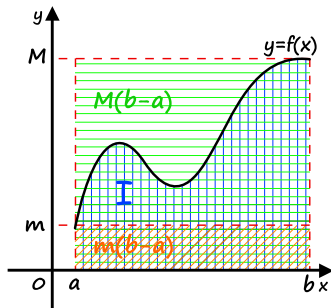
Korzystając z twierdzeń 3-go i 4-go można uzasadnić, że

$$\int_{-1}^1 \operatorname{sgn}(x) dx = \int_{-1}^0 (-1) dx + \int_0^1 (1) dx = -1 + 1 = 0.$$

Uwaga Zwyczajowo zamiast $\int (1) dx$ piszemy $\int dx$; podobnie postępujemy w przypadku całek oznaczonych.

Twierdzenie 5

Jeżeli $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ jest funkcją całkowalną oraz istnieją takie liczby rzeczywiste m i M , że $m \leq f(x) \leq M$ dla każdego $x \in [a, b]$, to zachodzą nierówności $m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$.



Rysunek: $I = \int_a^b f(x)dx$

Przykład 2

Oszacujmy wartość całki $\int_0^2 \sqrt{1+x^4} dx$. Obliczenie tej całki nie byłoby łatwym zadaniem. Zauważmy, że dla każdego $x \in [0, 2]$ zachodzą nierówności $0 \leq x^4 \leq 16$, a zatem $1 \leq x^4 + 1 \leq 17$.

Ponieważ funkcja pierwiastkowa jest funkcją rosnącą, to $1 \leq \sqrt{x^4 + 1} \leq \sqrt{17}$.

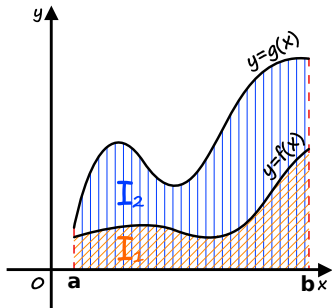
Skoro długość przedziału całkowania wynosi 2, to na mocy powyższego twierdzenia dostajemy następujące oszacowanie

wartości całki: $2 \leq \int_0^2 \sqrt{1+x^4} dx \leq 2\sqrt{17}$.

Twierdzenie 6

Jeżeli funkcje $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ oraz $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ są całkowlne, a ponadto $f(x) \leq g(x)$ dla każdego $x \in [a, b]$, to

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx.$$



Rysunek 5: $I_1 = \int_a^b f(x) dx$, $I_2 = \int_a^b g(x) dx$

Przykład 3

Z Twierdzenia 6 wynika, że $\int_0^1 2^{x^4} dx \leq \int_0^1 2^x dx$.

W. Majdak, Całka oznaczona funkcji jednej zmiennej rzeczywistej, AGH, Kraków 2014, e-podręcznik dostępny na stronie <https://epodreczniki.open.agh.edu.pl>

J. Stewart, Calculus. Rachunek różniczkowy i całkowy jednej zmiennej, PWN, Warszawa 2020.