

Szeregi liczbowe i funkcyjne

K.Czyżewska,M.Grządział

rok akademicki 2022/2023

Duża część prezentacji bazuje na e-podręczniku Katarzyny Czyżewskiej „Szeregi liczbowe”, wydanej przez AGH. Jest ona dostępna na stronie AGH.

<https://epodreczniki.open.agh.edu.pl/handbook/17>

Definicja 1

Niech (a_n) , dla $n \in \mathbb{N}$ będzie nieskończonym ciągiem liczbowym. Szeregiem liczbowym o wyrazach a_n nazywamy uporządkowaną parę ciągów $((a_n), (S_n))$, gdzie wyrazy ciągu S_n określone są jako $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ i nazywane n -tymi sumami częściowymi szeregu

Uwaga 1

Zauważamy, że w szeregu $((a_n), (S_n))$ wyrazy ciągu sum częściowych (S_n) są wyznaczone jednoznacznie przez wyrazy ciągu (a_n) . Również wyrazy ciągu (a_n) są wyznaczone jednoznacznie przez wyrazy ciągu (S_n) wzorem rekurencyjnym

$$\begin{cases} a_1 = S_1, \\ a_{n+1} = S_{n+1} - S_n. \end{cases}$$

Definicja 2

Mówimy, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny do sumy S , jeżeli istnieje właściwa granica ciągu sum częściowych (S_n) szeregu równa S tzn. $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$. Mówimy wtedy, że liczba S jest sumą szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Uwaga 2

Sumę szeregu zbieżnego oznaczamy: $S = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$
lub $S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Definicja 3

Jeżeli ciąg sum częściowych (S_n) szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ma granicę niewłaściwą $+\infty$, albo $-\infty$ to mówimy, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest rozbieżny do $+\infty$ albo do $-\infty$.

Definicja 4

Jeżeli ciąg sum częściowych (S_n) szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nie ma granicy, to mówimy, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest rozbieżny.

Definicja 5

Jeżeli przez R_{mn} , dla $m < n$ oznaczymy różnicę n -tej i $(m - 1)$ -szej sumy częściowej szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, tzn. $R_{mn} = S_n - S_{m-1}$, to m -tą resztą szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nazywamy liczbę $R_m = \lim_{n \rightarrow \infty} R_{mn}$.

Uwaga 3

Zauważmy, że $R_{mn} = a_m + a_{m+1} + \dots + a_n$ i jeżeli szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny do sumy S , to m -tą resztę szeregu możemy wyrazić wzorem $R_m = S - S_{m-1}$.

Twierdzenie 1

Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny do sumy S wtedy i tylko wtedy gdy ciąg reszt szeregu jest zbieżny do liczby 0, tzn. $\lim_{m \rightarrow \infty} R_m = 0$.

Uwaga 4

Na zbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nie ma wpływu pierwsze skończenie wiele wyrazów tego szeregu, tzn. jeżeli szereg $\sum_{n=m}^{\infty} a_n$ jest zbieżny dla pewnego $m \in \mathbb{N}$, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny, jednakże usunięcie skończonej liczby wyrazów szeregu może mieć wpływ na wartość jego sumy.

Przykład 1

Przykład 1 Zbadaj zbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$.

Rozwiązanie:

Obliczamy ciąg sum częściowych

$$\begin{aligned} S_n &= \ln\left(1 + \frac{1}{1}\right) + \ln\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \cdots + \ln\left(1 + \frac{1}{n-1}\right) + \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \ln 2 + \ln \frac{3}{2} + \cdots + \ln \frac{n}{n-1} + \ln \frac{n+1}{n} \\ &= \ln 2 + \ln 3 - \ln 2 + \cdots + \ln n - \ln(n-1) + \ln(n+1) - \ln n = \ln(n+1). \end{aligned}$$

Obliczamy granicę ciągu sum częściowych $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \ln(n+1) = \infty$.

Czyli szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ jest rozbieżny do ∞ .

Przykład 2

Zbadaj zbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[2n+1]{2} - \sqrt[2n-1]{2})$.

Rozwiązanie:

Obliczamy sumy częściowe $S_n = \sqrt[3]{2} - 2 + \sqrt[5]{2} - \sqrt[3]{2} + \cdots + \sqrt[2n+1]{2} - \sqrt[2n-1]{2} = \sqrt[2n+1]{2} - 2$.

Obliczamy granicę ciągu sum częściowych $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[2n+1]{2} - 2 = -1$.

Czyli szereg $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[2n+1]{2} - \sqrt[2n-1]{2})$ jest zbieżny do sumy -1 .

Przykład 3

Zbadaj zbieżność szeregu $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)}$.

Rozwiązanie:

Do obliczania sum częściowych szeregu korzystamy ze wzoru $\frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}$, dla

$n = 0, 1, 2, \dots$ czyli

$$S_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} = 1 - \frac{1}{n+2}.$$

Obliczamy granicę ciągu sum częściowych $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n+2}\right) = 1$.

Zatem szereg $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)}$ jest zbieżny do sumy $S = 1$.

Przykład 4

Zbadaj zbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$.

Rozwiązanie:

Ciąg sum częściowych ma postać $S_n = \frac{1}{1} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n-1}} + \frac{1}{\sqrt{n}}$.

Do obliczenia granicy ciągu sum częściowych skorzystamy z twierdzenia o dwóch ciągach

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n-1}} + \frac{1}{\sqrt{n}} \geq n \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}$$

Ponieważ granica ciągu o wyrazach mniejszych jest niewłaściwa $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} = \infty$, to granica ciągu sum częściowych też jest

niewłaściwa $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \infty$. Czyli szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ jest rozbieżny do ∞ .

Przykład 5

Wykazać, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} c_n \cdot 10^{-n}$, gdzie $c_n \in [0, 1]$ jest zbieżny do pewnej liczby $S \in [0, 1]$.

Rozwiązanie:

Obliczamy ciąg sum częściowych

$S_n = c_1 \cdot 0,1 + c_2 \cdot 0,01 + \dots + c_n \cdot 10^{-n}$. Ponieważ każda liczba $0 \leq c_n \leq 1$, to dla każdego n mamy ograniczenia

$$0 \leq S_n \leq 0,1 + 0,01 + \dots + 10^{-n} = 0,1 \cdot \frac{1-(0,1)^n}{0,9} < 1.$$

Zauważamy, że ciąg (S_n) jest niemalejący, czyli korzystając z twierdzenia o ciągu monotonicznym i ograniczonym wiemy, że jest on ciągiem zbieżnym i jego granica mieści się w przedziale $[0, 1]$.

Twierdzenie 2

Ciąg (a_n) monotoniczny i ograniczony jest zbieżny do pewnej granicy właściwej $g \in \mathbb{R}$.

Twierdzenie 3

Jeżeli $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny, to $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

Uwaga 5

Zbadanie warunku koniecznego zbieżności szeregu nic nie mówi o zbieżności wtedy, gdy jest spełniony, ale gdy nie jest spełniony, to wiemy, że szereg jest rozbieżny.

Przykład 6

Zbadaj zbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} (1 + \frac{1}{n})^n$.

Rozwiązanie:

Badamy warunek konieczny zbieżności $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^n = e$.

Ponieważ warunek konieczny zbieżności szeregu nie jest spełniony, bo $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} (1 + \frac{1}{n})^n$ jest rozbieżny.

Przykład 7

Zbadać zbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} n^a$, dla $a > 0$.

Rozwiązanie:

Obliczamy: $\lim_{n \rightarrow \infty} n^a = \infty$. Ponieważ warunek konieczny zbieżności szeregu nie jest spełniony, bo $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} n^a$, dla $a > 0$ jest rozbieżny.

Definicja 6

Mówimy, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest szeregiem o wyrazach nieujemnych, jeżeli wszystkie wyrazy a_n szeregu są nieujemne.

Definicja 7

Mówimy, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest szeregiem o wyrazach dodatnich, jeżeli wszystkie wyrazy a_n szeregu są dodatnie.

Uwaga 6

Jeżeli szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest szeregiem o wyrazach nieujemnych (dodatnich), to ciąg sum częściowych (S_n) ma wyrazy nieujemne (dodatnie) i jest niemalejący (rosnący).

Uwaga 7

Jeżeli szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest szeregiem o wyrazach nieujemnych (dodatnich), to jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy ciąg sum częściowych (S_n) jest ograniczony.

Definicja 8

Mówimy, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest szeregiem naprzemiennym, jeżeli dla każdej liczby naturalnej n , zachodzi warunek $a_{n+1} \cdot a_n < 0$.

Przykład 8

Zbadaj zbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$.

Rozwiązanie:

Badany szereg jest szeregiem naprzemiennym o wyrazie $a_n = (-1)^n$, czyli wszystkie wyrazy o indeksach parzystych równe są 1, a wyrazy o indeksach nieparzystych równe są -1 , zatem ciąg (a_n) nie ma granicy i nie jest spełniony warunek konieczny zbieżności szeregu. Czyli szereg $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$ jest rozbieżny.

Twierdzenie 4

Jeżeli szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny do sumy A oraz szereg $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ jest zbieżny do sumy B , to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ jest zbieżny do sumy $A + B$ i szereg $\sum_{n=1}^{\infty} ca_n$ jest zbieżny do sumy cA , dla dowolnego $c \in \mathbb{R}$.

Uwaga 8

Jeżeli szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny oraz szereg $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ jest rozbieżny, to $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ jest rozbieżny i szereg $\sum_{n=1}^{\infty} cb_n$ jest rozbieżny dla dowolnego $c \neq 0$.

Przykład 9

Zbadaj zbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n - 3^n}{5^n}$.

Rozwiązanie:

Rozważamy szeregi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{5^n}$ i $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{5^n}$, które są szeregami geometrycznymi o ilorazach $\frac{2}{5}$ i $\frac{3}{5}$ odpowiednio. Zatem szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{5^n}$ jest zbieżny do sumy $S_1 = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{1 - \frac{2}{5}} = \frac{2}{3}$, a szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{5^n}$ jest zbieżny do sumy $S_2 = \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{1 - \frac{3}{5}} = \frac{3}{2}$. A zatem szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n - 3^n}{5^n}$ jest zbieżny do sumy $S = \frac{2}{3} + (-1) \cdot \frac{3}{2} = -\frac{5}{6}$.

Definicja 9

Szeregiem geometrycznym o ilorazie $q \in \mathbb{R}$ nazywamy szereg postaci $\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}$, gdzie $a \in \mathbb{R}$.

Twierdzenie 5

Jeżeli iloraz q szeregu geometrycznego spełnia warunek $|q| < 1$, to szereg geometryczny $\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}$ jest zbieżny do sumy $S = \frac{a}{1-q}$, a dla $|q| \geq 1$ ($a \neq 0$) szereg geometryczny jest rozbieżny.

Twierdzenie 6

Jeżeli funkcja f jest ciągła, dodatnia i malejąca w przedziale $[n_0, +\infty)$, gdzie $n_0 \in \mathbb{N}$, to całka niewłaściwa $\int_{n_0}^{\infty} f(x)dx$ i szereg $\sum_{n=n_0}^{\infty} f(n)$ są jednocześnie zbieżne albo jednocześnie rozbieżne.

Przykład 10

Zbadaj zbieżność szeregu $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$. Rozwiązanie:

Rozważmy funkcję $f(x) = \frac{1}{x \ln x}$, która jest ciągła, malejąca i dodatnia w przedziale $[2, \infty)$.

Badamy zbieżność całki niewłaściwej $\int_2^{\infty} \frac{1}{x \ln x} dx$.

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \int_2^b \frac{1}{x \ln x} dx = \left| \begin{array}{l} t = \ln x \\ dt = \frac{1}{x} dx \\ x = 2 \rightarrow t = \ln 2 \\ x = b \rightarrow t = \ln b \end{array} \right| = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_{\ln 2}^{\ln b} \frac{1}{t} dt =$$

$$\lim_{b \rightarrow \infty} (\ln t \Big|_{\ln 2}^{\ln b}) = \lim_{b \rightarrow \infty} (\ln(\ln b) - \ln(\ln 2)) = \infty.$$

Zatem całka $\int_2^{\infty} \frac{1}{x \ln x} dx$ jest rozbieżna i na podstawie kryterium całkowego szereg $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$ jest też rozbieżny.

Przykład 11

Wykaż, że szereg harmoniczny rzędu α , jest rozbieżny dla $\alpha \in (0, 1]$ i zbieżny dla $\alpha > 1$.

Rozwiązanie: Rozważamy szereg harmoniczny rzędu α , czyli szereg postaci $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$, dla $\alpha > 0$. Badamy zbieżność szeregu z kryterium całkowego, rozważając funkcję $f(x) = \frac{1}{x^{\alpha}}$, która jest ciągła, dodatnia i malejąca dla $\alpha > 0$ i $x \geq 1$. Badamy zbieżność całki $I = \int_1^{\infty} \frac{1}{x^{\alpha}} dx$. Można sprawdzić, że

$$I = \frac{1}{\alpha - 1} \quad \text{dla } \alpha > 1.$$

Dla $0 < \alpha \leq 1$ całka I jest rozbieżna:

$$I = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{1}{x^{\alpha}} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \begin{cases} \frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} \Big|_1^b & \text{dla } \alpha \neq 1 \\ \ln x \Big|_1^b & \text{dla } \alpha = 1. \end{cases}$$

Szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$$

jest również zbieżny dla $\alpha > 1$ i rozbieżny dla $\alpha \in (0, 1]$.

Definicja 10

Założmy, że funkcja f ma w punkcie x_0 pochodną k -tego rzędu, $k \in \mathbb{N}$. Wielomian $P_k(x)$ określony wzorem

$$P_k(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

nazywamy wielomianem Taylora rzędu k w punkcie x_0 . Dla $x_0 = 0$ wielomian ten jest nazywany wielomianem Maclaurina.

Twierdzenie 7

Jeżeli funkcja f ma ciągłą pochodną rzędu $n - 1$ na przedziale domkniętym $[x_0, x]$ oraz pochodną rzędu n na przedziale (x_0, x) , to istnieje $c \in (x_0, x)$ takie, że

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}(x - x_0)^{n-1} + \frac{f^{(n)}(c)}{(n)!}(x - x_0)^n \quad (1)$$

Uwaga 9

Twierdzenie jest prawdziwe również dla przedziału $[x, x_0]$ przy analogicznych założeniach.

Uwaga 10

Wyrażenie

$$R_n(x) = \frac{f^{(n)}(c)}{(n)!}(x - x_0)^n$$

będziemy nazywać n -tą resztą Lagrange'a lub n -tą resztą w postaci Lagrange'a. Różnicę

$$f(x) - f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}(x - x_0)^{n-1}$$

można wyrazić również w postaci Cauchy'ego (por. artykuł „Wzór Taylora” w Wikipedii).

Uwaga 11

Równość (1) będziemy nazywać wzorem Taylora. Dla $x_0 = 0$ wzór Taylora przyjmuje postać

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}x^{n-1} + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}x^n, \quad (2)$$

gdzie $c \in (0, x)$ dla $x > 0$ lub $c \in (x, 0)$ dla $x < 0$. Równość (2) nazywany jest wzorem Maclaurina.

Przykład 12

Dla $f(x) = \sin x$ mamy

$$\sin x = P_{2m-1}(x) + R_{2m+1}(x),$$

gdzie

$$P_{2m-1}(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^{m-1} \frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!},$$

jest wielomianem Maclaurina rzędu $2m-1$; jest także wielomianem Maclaurina rzędu $2m$,

$$R_{2m+1}(x) = \frac{\sin^{(2m+1)}(c) \cdot x^{2m+1}}{(2m+1)!} = \frac{(-1)^m \cos c \cdot x^{2m+1}}{(2m+1)!},$$

$c \in (0, x)$. Łatwo można wyznaczyć oszacowanie błędu:

$$|R_{2m+1}(x)| \leq \frac{|x|^{2m+1}}{(2m+1)!}.$$

Dla $m = 1$

$$P_{2m-1}(x) = P_1(x) = x$$

przybliża wartość funkcji $f(x) = \sin x$ z błędem mniejszym niż $\frac{1}{6}|x|^3$. Błąd jest mniejszy niż (powiedzmy) 0,0001, tj.

$$\frac{1}{6}|x|^3 < 0,0001,$$

jeżeli

$$\begin{aligned} |x|^3 &< 0,0006 \\ |x| &< \sqrt[3]{0,0006} \approx 0,084, \end{aligned}$$

czyli

$$-0,084 \approx -\sqrt[3]{0,0006} < x < \sqrt[3]{0,0006} \approx 0,084$$

Kąt 0,084 wyrażony w radianach jest równy w przybliżeniu $4,8^\circ$.

Korzystając ze wzoru zawierającego dwa wyrazy

$$\sin x \approx x - \frac{1}{6}x^3$$

chcąc osiągnąć tę samą dokładność wyznaczamy rozwiązanie nierówności

$$\frac{1}{120}|x|^5 < 0,0001.$$

Rozwiązaniem jest przedział

$$-0,413 \approx -(0,012)^{1/5} < x < (0,012)^{1/5} \approx 0,413 \approx 24^\circ$$

Wielomiany Taylora można wyznaczać przy użyciu serwisu WolframAlpha wydając polecenia:

```
taylor series sin x  
taylor series sin x at x=pi/6  
taylor series sin x order 10
```

Notacja:

$$f(x) = O(g(x)) \quad \text{dla} \quad x \rightarrow a$$

wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją $d > 0$ i $C > 0$ takie, że

$$|f(x)| \leq C|g(x)| \quad \text{jeżeli} \quad |x - a| < d.$$

Zastosowanie: warunki wystarczające dla istnienia ekstremów

Twierdzenie 8

Założmy, że funkcja f ma w otoczeniu punktu x_0 $O(x_0, r)$ dla pewnego $r > 0$ ciągłe pochodne f' i f'' . Jeżeli $f'(x_0) = 0$ i $f''(x_0) \neq 0$, to funkcja f ma w punkcie x_0 ekstremum lokalne:

1. maksimum lokalne właściwe, jeżeli $f''(x_0) < 0$;
2. minimum lokalne właściwe, jeżeli $f''(x_0) > 0$.

Szkic dowodu. Ze wzoru Taylora dla $n = 2$ wynika, że dla $h \in (-r, r)$ istnieje $\theta \in (0, 1)$ takie, że

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)h + f''(x_0 + \theta h)\frac{h^2}{2},$$

więc

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = f''(x_0 + \theta h)\frac{h^2}{2}.$$

Jeżeli $f''(x_0) < 0$, to istnieje $0 < r_1 < r$ takie, że $f(x_0 + h) - f(x_0) < 0$ dla $h \in (-r_1, r_1)$: w x_0 funkcja ma maksimum lokalne właściwe. Tezę z punktu

2. dowodzimy analogicznie.

Przykład

Funkcja $f(x) = x^2$ ma w $x = x_0$ minimum lokalne, gdyż funkcja ta ma pierwszą i drugą pochodną ciągłą na $\mathbb{R}$ oraz $f'(0) = 0$, $f''(0) = 2$.

Definicja 11

Ciąg (f_n) , którego wyrazami są funkcje określone na zbiorze X i o wartościach w $\mathbb{R}$

$$f_n : X \rightarrow \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{N}$$

będziemy nazywać ciągiem funkcyjnym

Definicja 12

Niech (f_n) będzie ciągiem funkcyjnym określonym na zbiorze X . Powiemy, że (f_n) jest zbieżny punktowo do funkcji f na podzbiorze A zbioru X , jeżeli

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$$

dla każdego $x \in A$. Funkcję f nazywamy granicą ciągu (f_n) na zbiorze A .

Przykład 13

Dla ciągu (f_n) określonego na zbiorze $X = [0, 1]$ wzorem

$$f_n(x) = x^n$$

obszarem zbieżności jest $[0, 1]$. Granicą ciągu (f_n) jest funkcja g określona wzorem

$$g(x) = \begin{cases} 0, & \text{dla } x \in [0, 1); \\ 1, & \text{dla } x = 1. \end{cases}$$

Definicja 13

Niech (f_n) , dla $n \in \mathbb{N}$ będzie ciągiem funkcyjnym. Szeregiem funkcyjnym o wyrazach f_n nazywamy uporządkowaną parę ciągów $((f_n), (S_n))$, gdzie wyrazy ciągu S_n określone są jako $S_n = f_1 + f_2 + \dots + f_n$ i nazywane n -tymi sumami częściowymi szeregu.

Granica szeregu funkcyjnego nazywamy granicę jego sum częściowych.

Definicja 14

Niech funkcja f ma w punkcie x_0 pochodne dowolnego rzędu.

Szereg funkcyjny

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$$

będziemy nazywać szeregiem Taylora funkcji f o środku w punkcie x_0 . W przypadku, gdy $x_0 = 0$ szereg ten będziemy nazywać szeregiem Maclaurina.

Uwaga 12

Ze zbieżności szeregu Maclaurina danej funkcji nie wynika, że jego suma (granica jego sum częściowych) jest równa tej funkcji; przykładem może być funkcja f określona wzorem

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{dla } x \neq 0, \\ 0 & \text{dla } x = 0. \end{cases}$$

Twierdzenie 9

Założmy, że funkcja f ma otoczeniu punktu $(x_0 - r, x_0 + r)$ punktu x_0 , gdzie r jest pewną liczbą rzeczywistą większą niż 0, pochodną dowolnego rzędu, oraz dla każdego x z tego otoczenia spełniony jest warunek

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = 0,$$

gdzie

$$R_n = \frac{f^{(n)}(c)(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$$

oznacza n -tą resztę we wzorze Taylora dla funkcji f , $c \in (x_0 - r, x_0 + r)$ jest odpowiednio dobranym punktem, to

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k \quad \text{dla} \quad x \in (x_0 - r, x_0 + r)$$

Uwaga 13

Punkt c w powyższym twierdzeniu zależy od n i od x .

Przykład 14

Z Twierdzenia 9 wynika, że

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

dla $x \in \mathbb{R}$.

Przykład 15

Z Twierdzenia 9 wynika, że

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

dla $x \in \mathbb{R}$.

Rozwinięcia potęgowe funkcji eksponencjalnej i funkcji sinus: mogą być wykorzystane do sformułowania analitycznej definicji tych funkcji.

Te definicje mogą być rozszerzone na przypadek funkcji, których argumentami są liczby zespolone.

Funkcja eksponencjalna argumentu zespolonego

Funkcja określona

$$\exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \quad (3)$$

gdzie z jest dowolną liczbą zespoloną nazywana jest funkcją eksponencjalną argumentu zespolonego (eksponentą zespoloną). Szereg (3) jest zbieżny dla $z \in \mathbb{C}$.

Można pokazać, że prawdziwy jest wzór Eulera:

$$e^{it} = \cos t + i \sin t, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Dla $t = \pi$ otrzymujemy równość

$$e^{i\pi} = -1.$$

Równość

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

nazywana jest tożsamością Eulera.

Exponenta macierzy

Dla macierzy kwadratowej A eksponentę macierzową definiujemy wzorem

$$\exp A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!},$$

przy czym przyjmuje się:

$$A^0 = I,$$

gdzie A jest macierzą kwadratową, I jest macierzą identycznościową, której stopień jest równy stopniowi macierzy A .

Literatura

K. Czyżewska, Szeregi liczbowe, AGH 2019.

M. Gewert, Z. Skoczylas, Analiza Matematyczna 1. Definicje. twierdzenia, wzory. wyd. 27, Oficyna Wydawnicza GiS, Wrocław 2020.

M. Gewert, Z. Skoczylas, Analiza Matematyczna 2. Definicje. twierdzenia, wzory, wydanie 18, Oficyna Wydawnicza GiS, Wrocław 2016.

H. Marcinkowska, Analiza Matematyczna, Analiza Matematyczna. Funkcje jednej zmiennej. Książka dostępna na stronie:

<http://www.math.uni.wroc.pl/analiza-1>