

Dla danych liczb rzeczywistych a i b takich, że $a < b$, funkcji f , której dziedzina zawiera odcinek $[a, b]$ i liczby naturalnej n określamy sumy Riemanna L_n , M_n i R_n wzorami

$$L_n = \sum_{k=1}^n f(a + (k-1)\Delta x)\Delta x, \quad M_n = \sum_{k=1}^n f(a + (k - \frac{1}{2})\Delta x)\Delta x, \quad R_n = \sum_{k=1}^n f(a + k\Delta x)\Delta x,$$

gdzie

$$\Delta x = \frac{b-a}{n}.$$

L_n jest sumą Riemanna obliczoną dla punktów pośrednich leżących w lewych końcach przedziałów, na które dzielimy odcinek $[a, b]$,

R_n jest sumą Riemanna obliczoną dla punktów pośrednich leżących w prawych końcach przedziałów, na które dzielimy odcinek $[a, b]$,

M_n jest sumą Riemanna obliczoną dla punktów pośrednich leżących w środku przedziałów, na które dzielimy odcinek $[a, b]$.

1. Obliczyć sumy Riemanna L_5 , M_5 i R_5 dla funkcji f określonej wzorem $f(x) = \frac{1}{x}$, $a = 1$ i $b = 2$ aproksymując wartość całki

$$I = \int_a^b f(x)dx = \int_1^2 \frac{1}{x}dx.$$

Która z liczb: L_5 , M_5 oraz R_5 najlepiej przybliży wartość całki I ? Całkę tę należy obliczyć wykorzystując twierdzenie Newtona-Leibniza.

2. Obliczyć sumy Riemanna L_4 , M_4 i R_4 dla funkcji f określonej wzorem $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, $a = 0$ i $b = 1$ aproksymując wartość całki

$$I = \int_a^b f(x)dx = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx.$$

Która z liczb: L_4 , M_4 oraz R_4 najlepiej przybliży wartość całki I ? Całkę tę należy obliczyć wykorzystując twierdzenie Newtona-Leibniza.

3. Uzasadnić, że

$$\int_0^2 \sqrt{1+x^6}dx \geq 4$$

wykorzystując Twierdzenie 5 z wykładu z „Całka Riemanna”.

4. Funkcję sygnum (oznaczaną symbolem sgn) definiujemy wzorem:

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} -1, & x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ 1, & x > 0. \end{cases}$$

Obliczyć całkę

$$J = \int_{-1}^2 \operatorname{sgn}(x)dx.$$

Wskazówka: Uzasadnić równość

$$\int_{-1}^2 \operatorname{sgn}(x)dx = \int_{-1}^0 (-1)dx + \int_0^2 1dx \tag{1}$$

wykorzystując twierdzenia podane na wykładzie „Całka Riemanna”.

W jaki sposób można uzasadnić równość (1) odwołując się do intuicji geometrycznych?

5. Uzasadnić, że funkcja

$$f(x) = \sin(\sin x), \quad x \in \mathbb{R},$$

jest:

- (a) okresowa z okresem $T = 2\pi$;
- (b) nieparzysta.

6. Obliczyć całkę

$$\int_1^2 \sin(\sin x) dx$$

wydając polecenie

integrate sin(sin(x)) from 1 to 2

w systemie WolframAlpha.

Czy system WolframAlpha jest w stanie policzyć całkę nieoznaczoną z funkcji

$$f(x) = \sin(\sin x)?$$

Literatura

[Ste20] J. Stewart, Calculus. Rachunek różniczkowy i całkowy funkcji jednej zmiennej. PWN 2020.

Mariusz Grządziel