

Niech a oznacza liczbę liter w imieniu, b liczbę liter w nazwisku.

Przyjmujemy $a = 3$ i $b = 5$ (odpowiadałoby to imieniu Jan i nazwisku Nowak).

1. Obliczyć pochodne cząstkowe drugiego rzędu funkcji:

(a) $f(x, y) = 2x + 3y - 2$;

(b) $f(x, y) = 2 \sin xy$;

(c) $g(x, y, z) = x^3 + y^{4x} - 3xyz^5$;

(d) $g(x, y, x) = \cos(x + 2y + 4z)$.

2. Sprawdzić, że funkcja f spełnia równanie Laplace'a

$$f_{xx} + f_{yy} = 0.$$

(a) $f(x, y) = 2x^2 - 2y^2$;

(b) $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$;

(c) $f(x, y) = e^x \sin y$.

W jakich dziedzinach nauki pojawia się to równanie? Wiadomości o tym równaniu i jego zastosowaniach można znaleźć w artykule „Równanie różniczkowe Laplace'a” w Wikipedii.

3. Dla funkcji

$$f(x, y) = \sin(x^a y^b)$$

obliczyć gradient i macierz Hessego (macierz drugich pochodnych).

Uwaga. Macierz Hessego może być zdefiniowana następująco:

Niech funkcja f ma wszystkie pochodne cząstkowe rzędu drugiego w punkcie A . Macierz

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(A) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(A) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(A) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(A) \end{pmatrix}$$

będziemy nazywać macierzą Hessego dla funkcji f i punktu A i oznaczać $M_H(A)$ a jej wyznacznik przez $H(A)$.

4. Dla funkcji

$$f(x, y) = \sin 3x \cos 5y$$

obliczyć gradient i macierz Hessego (macierz drugich pochodnych).

5. Obliczyć pochodne kierunkowe podanych funkcji we wskazanych punktach dla wymienionych wersorów:

(a) $f(x, y) = x^2 + 2y^2$, $(x_0, y_0) = (1, 1)$, $v = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$;

(b) $f(x, y) = xy$, $(x_0, y_0) = (1, 2)$, $v = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$.

6. Napisać równanie płaszczyzny stycznej do wykresu funkcji

$$f(x, y) = ax^2 + by^2$$

w punkcie $P = (1, 1, a + b)$.

7. Wyznaczyć równanie płaszczyzny stycznej do wykresu funkcji

$$f(x, y) = ax^2 + by^2$$

w punkcie $P = (0, 1, b)$.

Mariusz Grządziel