

Niech a oznacza liczbę liter w imieniu, b liczbę liter w nazwisku.

1. Dana jest funkcja $\mathbf{F}: U \rightarrow \mathbb{R}^3$ określona na zbiorze otwartym $U \subset \mathbb{R}^3$. Załóżmy, że $\mathbf{F}$ ma ciągle pochodne cząstkowe (jest klasy $C^{(1)}$); funkcja ta ma w wybranym układzie współrzędnych trzy funkcje składowe i nazywana jest polem wektorowym w przestrzeni $\mathbb{R}^3$:

$$\mathbf{F} = (F_1, F_2, F_3)$$

i nazywana jest polem wektorowym w przestrzeni $\mathbb{R}^3$.

Dywergencję pola $\mathbf{F}$, którą oznaczymy symbolem $\operatorname{div} \mathbf{F}(x, y, z)$, definiujemy wzorem

$$\operatorname{div} \mathbf{F}(x, y, z) = \frac{\partial F_1(x, y, z)}{\partial x} + \frac{\partial F_2(x, y, z)}{\partial y} + \frac{\partial F_3(x, y, z)}{\partial z}.$$

Rotację pola $\mathbf{F}$, którą oznaczymy symbolem $\operatorname{rot} \mathbf{F}(x, y, z)$, nazwiemy wektor o składowych (określonych w U)

$$\frac{\partial F_3(x, y, z)}{\partial y} - \frac{\partial F_2(x, y, z)}{\partial z}, \quad \frac{\partial F_1(x, y, z)}{\partial z} - \frac{\partial F_3(x, y, z)}{\partial x}, \quad \frac{\partial F_2(x, y, z)}{\partial x} - \frac{\partial F_1(x, y, z)}{\partial y}.$$

Dla pola

$$G(x, y, z) = (y^3, x^2, xy), \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,$$

wyznaczyć dywergencję i rotację.

Uwaga. Zastosowania operatorów dywergencji i rotacji omówione są w filmie Dywergencja i Rotacja dostępnego w kanale 3Blue1Brown na YouTube; odpowiedni link jest umieszczony na stronie naszego kursu.

2. Obliczyć

$$\iint_R (xy + e^y) dP,$$

gdzie $R = [a, a+1] \times [b, b+2]$.

Wskazówka. Definicję iloczynu kartezjańskiego $A \times B$ zbiorów A i B można znaleźć np. w Wikipedii:

https://pl.wikipedia.org/wiki/Iloczyn_kartezjański

3. Obliczyć $\iint_R (3xy - ax^2 - by^2 + 6) dP$, gdzie R jest trójkątem ograniczonym przez proste $x = 0$, $y = 0$ i $x/2 + y = 1$.

4. Dla funkcji f określonej wzorem

$$f(x, y) = 40 - ax - by, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2,$$

obliczyć

$$I = \iint_R f(x, y) dP,$$

gdzie R jest kołem o równaniu $x^2 + y^2 \leq 1$.

5. Obliczyć

$$\int_{-1}^1 dx \int_0^1 dy \int_0^2 (ax^2 + by^2 + z^2) dz.$$

Mariusz Grządziel