Całka nieoznaczona

dr Mariusz Grządziel

Katedra Matematyki, Uniwersytet Przyrodniczy we Wrocławiu

semestr zimowy, rok akademicki 2022/2023

Motywacja

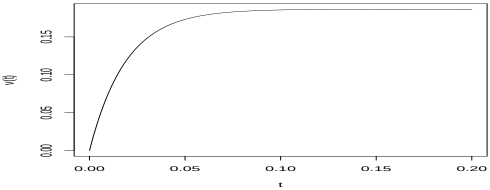
Problem 1

Kropla wody o średnicy $0{,}07$ *mm porusza się z prędkością*

$$v(t) = \frac{g}{c}(1 - e^{-ct}),$$

gdzie g *oznacza przyśpieszenie ziemskie, a stała* $c = 52{,}6\frac{1}{s}$ *została wyznaczona eksperymentalnie.*
W chwili $t = 0$ *prędkość jest równa* 0.
Chcemy znaleźć drogę $s(t)$*, jaką przebyło ciało po upływie czasu* t.

Prędkość małej kropli



Rysunek: Prędkość kropli o średnicy 0,07 mm w zależności od czasu

Funkcja pierwotna

Problem sprowadza się do znalezienia funkcji $s(t)$ takiej, że

$$s'(t) = v(t), t \in (0, \infty). \tag{1}$$

Definicja 1 (funkcji pierwotnej)

Funkcja F jest funkcją pierwotną funkcji f na przedziale otwartym $\mathbf{I}$, jeśli

$$F'(x) = f(x) \text{ dla każdego } x \in \mathbf{I}.$$

Uwaga Jeżeli funkcja f jest określona na przedziale domkniętym $[a, b]$, to F nazywamy funkcją pierwotną funkcji f, jeżeli

$$F'(x) = f(x) \text{ dla } x \in (a, b), \quad F'_+(a) = f(a), \quad F'_-(b) = f(b).$$

Funkcja pierwotna — przykłady

Przykład 1

Funkcjami pierwotnymi $f(x) = x^3$ *na przedziale* $\mathcal{I} = \mathbb{R}$ *są na przykład:*

- $F_1(x) = \frac{x^4}{4} + 2$;
- $F_2(x) = \frac{x^4}{4} - 3$.

Twierdzenie 1

Niech F będzie funkcją pierwotną funkcji f na przedziale $\mathbf{I}$.*Wtedy*
(i) $G(x) = F(x) + C$, gdzie $C \in \mathbb{R}$, jest funkcja pierwotną funkcji f na $\mathbf{I}$,
(ii) każdą funkcję pierwotną funkcji f na $\mathbf{I}$ *można przedstawić w postaci $F(x) + D$, gdzie $D \in \mathbb{R}$.*

Uwaga. Powyższe twierdzenie mówi o postaci funkcji pierwotnych dla ustalonej funkcji. Funkcje pierwotne mają postać $F(x) + C$

Twierdzenie 2

Jeżeli funkcja jest ciągła na przedziale, to ma funkcję pierwotną na tym przedziale.

Uwaga. Funkcja pierwotna funkcji elementarnej nie musi być funkcją elementarną, np. pierwotna funkcji:

$$f(x) = e^{-x^2}$$

nie jest funkcją elementarną.

Całki nieoznaczone

Definicja 2 (całki nieoznaczonej)

Niech F będzie funkcją pierwotną funkcji f na przedziale **I**. *Całką nieoznaczoną funkcji f na przedziale* **I** *oznaczamy zbiór funkcji*

$$\{F(x) + C : C \in \mathbb{R}\}\,.$$

Całkę nieoznaczoną funkcji f oznaczamy przez $\int f(x)dx$.

Całka nieoznaczona — notacja

Uwaga. W dalszej części wykładu będziemy opuszczali nawiasy klamrowe w definicji całki nieoznaczonej, a więc np. zamiast pisać

$$\int x dx = \left\{ \frac{x^2}{2} + C, C \in \mathbb{R} \right\}$$

będziemy pisać:

$$\int x dx = \frac{x^2}{2} + C.$$

Działania i operacje na całkach oznaczonych

Działania i operacje na całkach nieoznaczonych oznaczają działania i operacje na funkcjach pierwotnych reprezentujących te całki.

Równość całek nieoznaczonych oznacza równość odpowiednio wybranych funkcji pierwotnych reprezentujących te całki.

Fakt 1. Jeśli funkcja f ma funkcję pierwotną na przedziale **I**, wtedy

$$\left[\int f(x)dx\right]' = f(x).$$

na **I**.

Fakt 2. Jeżeli funkcja f ma ciągłą pochodną na przedziale **I**, to

$$\int f'(x)dx = f(x) + C,$$

na przedziale I, gdzie C jest pewną liczbą rzeczywistą.

Całki nieoznaczone ważniejszych funkcji elementarnych

Wzór	Zakres zmienności
$\int 0 dx = C$	$x \in \mathbb{R}$
$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$	$n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ oraz $x \in \mathbb{R}$
$\int x^p dx = \frac{x^{p+1}}{p+1} + C$	$p = -2, -3, \dots ; x < 0$ lub $x > 0$
$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$	$\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$
$\int \frac{1}{x} dx = \ln \lvert x \rvert + C$	$x \in (-\infty, 0)$ lub $x \in (0, \infty)$
$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$	$0 < a \neq 1$ oraz $x \in \mathbb{R}$
$\int e^x dx = e^x + C$	$x \in \mathbb{R}$
$\int \sin x dx = -\cos x + C$	$x \in \mathbb{R}$
$\int \cos x dx = \sin x + C$	$x \in \mathbb{R}$
$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$	$x \in (k\pi, (k+1)\pi)$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$
$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$	$x \in (-\frac{\pi}{2}\pi + k\pi, \frac{\pi}{2}\pi + k\pi)$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$
$\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arc\,tg} x + C$	$x \in \mathbb{R}$
$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$	$x \in (-1, 1)$

Twierdzenie o całkach nieoznaczonych

Twierdzenie 3

Jeżeli funkcje f i g mają funkcje pierwotne, to
(i) $\int (f(x) + g(x))\,dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx,$
(ii) $\int (f(x) - g(x))\,dx = \int f(x)dx - \int g(x)dx,$
(iii) $\int (cf(x))\,dx = c\int f(x)dx, \quad \text{gdzie } c \in \mathbb{R}.$

Przykład 2

Korzystając z Twierdzenia 3 chcemy obliczyć całkę $\int (x - 3e^x)\,dx$*:*

$$\int (x - 3e^x)\,dx = \int xdx - 3\int e^x dx = \frac{x^2}{2} - 3e^x + C.$$

Całkowanie przez części

Twierdzenie 4 (o całkowaniu przez części))

Jeżeli funkcje f i g mają ciągłe pochodne na przedziale I, to

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$

na tym przedziale.

Ćwiczenie 1

Korzystając z twierdzenia o całkowaniu przez części obliczyć podane całkę nieoznaczoną:

$$\int x\cos x dx.$$

Przyjmujemy $f(x) = x$, $g'(x) = \cos x$.
Wtedy $f'(x) = 1$ *i (można przyjąć np.)* $g(x) = \sin x$.

$$\int x\cos x dx = x\sin x - \int \sin x dx = x\sin x + \cos x + C.$$

Całkowanie przez podstawienie- podstawienie liniowe

Twierdzenie 5

Jeśli

$$\int f(t)dt = F(t) + C,$$

to

$$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C.$$

Dowód wynika z twierdzenia o pochodnej funkcji złożonej:

$$[F(ax+b)]' = aF'(ax+b) = af(ax+b).$$

Przykłady. Z twierdzenia 5 wynika:
(i) $\int \cos mx \, dx = \frac{1}{m} \sin mx dx + C$,
(ii) $\int e^{-2x} \, dx = -\frac{1}{2} e^{-2x} + C$.

Twierdzenie 6 (o całkowaniu przez podstawienie)

Jeśli wiadomo, że

$$\int g(t)dt = G(t) + C \quad \textit{na przedziale} \quad I,$$

to

$$\int g(u(x))u'(x)dx = G(u(x)) + C \quad \textit{na przedziale} \quad J, \tag{2}$$

gdzie u jest funkcją odwzorowującą przedział J w przedział I. Zakładamy, że $g(u)$ i $u'(t)$ są ciągłe na przedziałach całkowania, odpowiednio, I i J.

Dowód tego twierdzenia wynika z twierdzenia o różniczkowaniu funkcji złożonej.
Przyjmując oznaczenie $du = u'(x)dx$ wzór (2) może być zapisany w postaci:

$$\int g(u)du = G(u) + C \quad \text{na przedziale} \quad I. \tag{3}$$

Z twierdzenia tego wnioskiem jest Twierdzenie 5, które odpowiada przypadkowi, gdy funkcja u jest liniowa:

$$u(x) = ax + b.$$

Przykład

Chcemy obliczyć całkę nieoznaczoną

$$\int \sin^3 x \cos x dx.$$

Wprowadzając zmienną $u = \sin x$ obliczamy $du = \cos x dx$; powyższa całka jest równa

$$\int u^3 du = \frac{u^4}{4} + C = \frac{\sin^4 x}{4} + C.$$

Przyjmujemy, że przedziałami całkowania dla obu całek jest prosta $\mathbb{R}$.

Droga przebyta przez kroplę — c.d.

Możemy teraz łatwo znaleźć funkcję $s(t)$ z Problemu 1. Mamy $s(0) = 0$ oraz

$$\int v(t)dt = \int \frac{g}{c}\left(1 - e^{-ct}\right)dt = \frac{g}{c}\left(t + \frac{1}{c}e^{-ct}\right) + C.$$

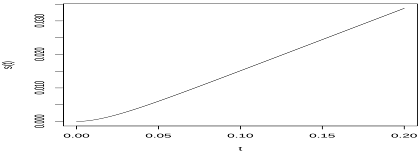
Funkcja s jest równa funkcji pierwotnej z

$$C = -\frac{g}{c^2},$$

czyli

$$s(t) = \frac{g}{c}(t + \frac{1}{c}e^{-ct}) - \frac{g}{c^2}.$$

Droga przebyta przez małą kroplę



Rysunek: Droga przebyta przez kroplę o średnicy 0,07 mm w zależności od czasu