

# Całka oznaczona funkcji ciągłej

dr Mariusz Grządziel

Katedra Matematyki, Uniwersytet Przyrodniczy we Wrocławiu

rok akademicki 2022/2023

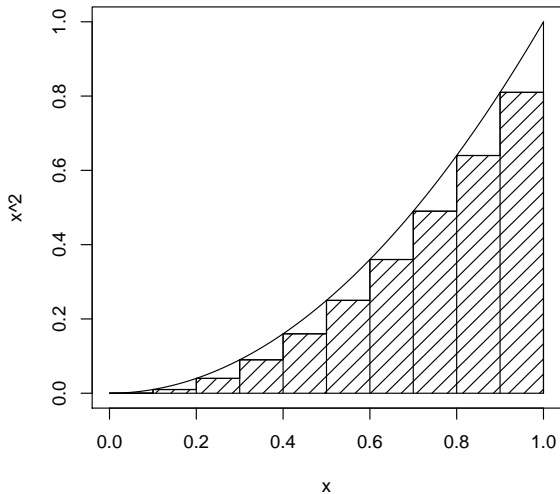
## Pole „trójkąta parabolicznego”

**Problem.** Chcemy obliczyć pole  $S$  figury  $S$  ograniczonej prostą  $y = 0$ , prostą  $x = 1$  i wykresem funkcji  $f(x) = x^2$ .

**Rozwiązanie przybliżone.** Dzielimy odcinek  $[0, 1]$  na  $n$  odcinków o równej długości:

$$\left[0, \frac{1}{n}\right), \left[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right), \dots, \left[\frac{n-1}{n}, 1\right).$$

Suma pól prostokątów, których podstawy są równe tym odcinkom a wysokości kwadratami ich lewych końców — sensowne przybliżenie



Rysunek: Obliczanie przybliżonej wartości pola figury S

## Pole „trójkąta parabolicznego”- obliczenia

Oznaczmy pole figury odpowiadającej podziałowi odcinka na  $n$  części przez  $s_n$ . Mamy

$$s_n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \left( \frac{i-1}{n} \right)^2 = \frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^n (i-1)^2 = \frac{(n-1)n(2n-1)}{6n^3}.$$

Pole figury jest równe

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n-1)n(2n-1)}{6n^3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^3 - 3n^2 + n}{6n^3} = \frac{1}{3} \quad (1)$$

# Definicja całki oznaczonej dla funkcji ciągłej

## Definicja

Założmy, że funkcja  $f$  jest ciągła na przedziale  $[a, b]$ . Całkę oznaczoną z funkcji ciągłej  $f$  na przedziale  $[a, b]$  definiujemy wzorem

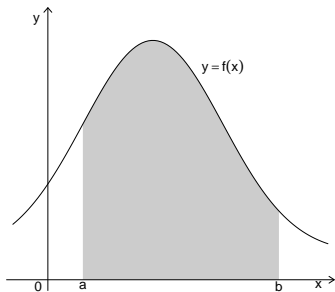
$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f \left( a + (k-1) \frac{b-a}{n} \right) \right]. \quad (2)$$

Korzystając z wprowadzonej notacji, pole „trójkąta parabolicznego” można wyrazić następująco:

$$\int_0^1 x^2 dx.$$

## Zastosowania całki oznaczonej— pole trapezu krzywoliniowego

Figurę ograniczoną: wykresem funkcji  $f$ , gdzie  $f$  jest funkcją ciągłą na przedziale  $[a, b]$ , prostymi  $x = a$ ,  $x = b$  oraz prostą  $y = 0$  będziemy nazywać trapezem krzywoliniowym. Jego pole jest równe  $\int_a^b f(x) dx$ .



## Całka $\int_b^a f(x)dx$ gdy $b < a$

Jeśli  $a < b$ , to będziemy przyjmowali:

$$\int_b^a f(x)dx = - \int_a^b f(x)dx.$$

oraz (gdy  $a = b$ )

$$\int_a^a f(x)dx = 0.$$

# Całki Riemanna i Lebesgue'a

Potrzeby praktyki (i teorii):

konstrukcja całki pewnych funkcji, które nie są ciągłe (na odcinku  $[a, b]$ .)

Konstrukcje takie podali:

B. Riemann (1826-1866);

H. Lebesgue (1875-1941)

# Całka oznaczona funkcji ujemnej-interpretacja geometryczna

Jeśli funkcja  $f$  jest ujemna na przedziale  $[a, b]$ ,  $a < b$ , to całka  $\int_a^b f(x)dx$  jest równa polu figury ograniczonej: prostymi  $y = 0$ ,  $x = a$  i  $x = b$  oraz wykresem funkcji  $f(x)$  pomnożonemu przez  $(-1)$ .

# Całka oznaczona — interpretacja geometryczna (przypadek ogólny)

Niech  $f$  będzie funkcją ciągłą na  $[a, b]$ . Wtedy:  
funkcja  $f_+$  zdefiniowana wzorem  $f_+(x) = \max(f(x), 0)$  i  
funkcja  $f_-$  zdefiniowana wzorem  $f_-(x) = \max(-f(x), 0)$   
są ciągłe i  $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f_+(x) - \int_a^b f_-(x)$ . Całka  $\int_a^b f(x) dx$  jest  
równa różnicy pól trapezów krzywoliniowych odpowiadających  
 $f_+$  i  $f_-$  (oba trapezy krzywoliniowe są określone dla odcinka  
 $[a, b]$ ).

Całka oznaczona funkcji  $f$  na odcinku  $[a, b]$  — „znakowane”  
pole figury pomiędzy wykresem  $f$  i osią  $OX$ .

## Przykład

Całka  $\int_{-1}^2 2x dx$  jest równa różnicy pól dwóch trapezów krzywoliniowych (które w tym przypadku są trójkątami):

$$4 - 1 = 3.$$

## Zastosowanie do wyznaczania położenia w ruchu zmiennym

Punkt materialny porusza się ruchem prostoliniowym z prędkością  $v(t)$  zależną od czasu. Chcemy wyznaczyć zmianę położenia  $s$  tego punktu w przedziale czasowym  $[a, b]$ . Zakładamy, że funkcja  $v$  jest ciągła.

Podzielmy przedział  $[a, b]$  na  $n$  odcinków o równej długości:

$$[t_0, t_1), [t_1, t_2), \dots, [t_{n-2}, t_{n-1}), [t_{n-1}, t_n], \text{ gdzie } t_0 = a, t_n = b$$

zmiana położenia punktu na przedziale czasowym

$$[t_{i-1}, t_i] = \left[ a + (i-1) \frac{b-a}{n}, a + i \frac{b-a}{n} \right] \text{ lub}$$

$$[t_{i-1}, t_i) = \left[ a + (i-1) \frac{b-a}{n}, a + i \frac{b-a}{n} \right) \text{ jest równa w przybliżeniu } v(t_{i-1}) \frac{b-a}{n}.$$

Wartość przybliżona zmiany położenia punktu materialnego na przedziale:  $[a, b]$  jest równa:

$$s_n = \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^n v \left( a + (i-1) \frac{b-a}{n} \right). \quad (3)$$

# Zastosowanie do obliczania zmiany położenia w ruchu zmiennym— c.d.

Przechodząc do granicy ( $n \rightarrow \infty$ ):

$$s = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \int_a^b v(t) dt.$$

Jeśli  $V(t)$  jest dowolną funkcją pierwotną funkcji  $v(t)$  na przedziale  $I = [a, b]$ , wtedy zmiana położenia punktu materialnego w przedziale czasowym  $[a, b]$  jest równa  $V(b) - V(a)$ .

# Twierdzenie Newtona-Leibniza

## Twierdzenie

Jeżeli funkcja  $f$  jest ciągła na przedziale  $[a, b]$ , to

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a), \quad (4)$$

gdzie  $F$  oznacza dowolną funkcję pierwotną funkcji  $f$  na tym przedziale.

Twierdzenie to ma interpretację fizyczną: Droga przebyta przez punkt materialny na przedziale czasowym  $[a, b]$  jest równa  $V(b) - V(a)$ , gdzie  $V$  jest dowolną funkcją pierwotną prędkości  $v$  na  $[a, b]$ . Precyzyjny dowód Tw. Newtona-Leibniza można znaleźć np. książce Gewerta i Skoczylasa „Analiza matematyczna 1. Definicje, twierdzenia, wzory”, Tw. 2.1, rozdz. 7 (wyd. 25-27).

**Uwaga.** Zamiast  $F(b) - F(a)$  będziemy pisali  $F(x)|_a^b$  lub  $[F(x)]_a^b$ .

# Przykłady

**Przykład 1.** Obliczyć całkę oznaczoną

$$\int_0^1 x^2 dx.$$

Mamy: na przedziale  $[0, 1]$

$$\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C,$$

stąd:

$$\int_0^1 x^2 dx = \left[ \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{3}.$$

## Zastosowania całki oznaczonej— obliczanie pola figur

Chcemy obliczyć pole figury ograniczonej przez: wykres funkcji  $f(x) = \sin x$  oraz proste:  $x = 0$ ,  $x = \pi$  i  $y = 0$ , tj. chcemy znaleźć pole trapezu krzywoliniowego odpowiadającego funkcji  $f(x) = \sin x$  i odcinkowi  $[0, \pi]$ .

Pole to jest równe:

$$\int_0^{\pi} \sin x dx = [-\cos x]_0^{\pi} = -\cos \pi - (-\cos 0) = 1 + 1 = 2.$$

# Całkowanie przez podstawienie; całkowanie przez części

Twierdzenie (o całkowaniu przez części)

*Jeżeli funkcje  $f$  i  $g$  mają ciągłe pochodne na przedziale  $[a, b]$ , to*

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx.$$

## Twierdzenie (o całkowaniu przez podstawienie)

*Jeśli funkcja  $u : [\alpha, \beta] \rightarrow [a, b]$  jest surieckją (jest „na”) i ma ciągłą pochodną na przedziale  $[\alpha, \beta]$ ,  $u(\alpha) = a$ ,  $u(\beta) = b$  i funkcja  $f$  jest ciągła na przedziale  $[a, b]$*

*to*

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(u(x))u'(x)dx = \int_a^b f(x) dx. \quad (5)$$

## Zastosowania całki oznaczonej— obliczanie pola figur

Chcemy obliczyć pole figury ograniczonej przez: wykres funkcji  $f(x) = \sin 2x$  oraz proste:  $x = 0$ ,  $x = \pi/2$  i  $y = 0$ , tj. chcemy znaleźć pole trapezu krzywoliniowego odpowiadającego funkcji  $f(x) = \sin 2x$  i odcinkowi  $[0, \pi/2]$ .

Pole to jest równe:

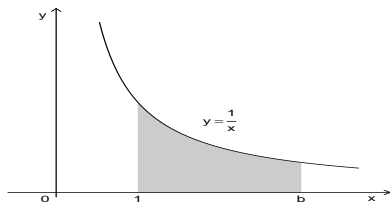
$$\int_0^{\pi/2} \sin 2x dx = \left[ -\frac{1}{2} \cos 2x \right]_0^{\pi} = -\frac{1}{2} \cos \pi - \frac{1}{2} (-\cos 0) = 1.$$

## Zastosowania całki oznaczonej— obliczanie pola figur— c.d.

Chcemy obliczyć pole figury ograniczonej przez: wykres funkcji  $f(x) = \frac{1}{x}$  oraz proste:  $x = 1$ ,  $x = b$  i  $y = 0$ , gdzie  $b > 1$ , tj. chcemy znaleźć pole trapezu krzywoliniowego odpowiadającego funkcji  $f(x) = \frac{1}{x}$  i odcinkowi  $[1, b]$ . Pole to jest równe:

$$\int_1^b \frac{1}{x} dx = [\ln x]_1^b = \ln b - \ln 1 = \ln b.$$

# Zastosowania całki oznaczonej— obliczanie pola figur— c.d.



**Rysunek:** Logarytm naturalny liczby  $b > 1$  jako pole trapezu krzywoliniowego odpowiadającemu funkcji  $f(x) = \frac{1}{x}$  i odcinkowi  $[1, b]$ .

## Zastosowania całki oznaczonej— wyznaczanie położenia punktu materialnego w ruchu zmiennym

Punkt materialny porusza się z prędkością  $\mathbf{v}(t) = \cos t$ . Chcemy znaleźć  $s(T)$ , położeniu punktu w czasie  $T = \pi$ . Zakładamy, że  $s(0) = 0$ .

Mamy

$$s(\pi) = \int_0^{\pi} \cos t \, dt = [-\sin t]_0^{\pi} = 0 - 0 = 0.$$

**Uwaga.** Droga przebyta przez punkt materialny poruszający się z prędkością  $\mathbf{v}(t)$  na przedziale czasowym  $[a, b]$  jest równa

$$\int_a^b |\mathbf{v}(t)| \, dt,$$

zakładamy, że  $\mathbf{v}(t)$  jest ciągła na  $[a, b]$ . Tak więc punkt materialny rozważany w naszym zadaniu przebył drogę równą 2.

## Zastosowania całki oznaczonej— droga przebyta przez punkt materialny— c.d.

Zenek podczas zawodów biegnie z prędkością

$$v_Z(t) = |\mathbf{v}_Z(t)| = 8e^{-0,01t} [m/sek], \quad t \geq 0.$$

Chcemy znaleźć dystans przebyty przez Zenka od chwili  $T = 0$  do chwili  $T = 100$ .

Droga przebyta przez Zenka (chwili  $T = 100$ ) jest równa:

$$\begin{aligned} \int_0^{100} v_Z(t) dt &= \left[ 8 \frac{1}{-0,01} e^{-0,01t} \right]_0^{100} = \\ &= \left[ -\frac{8}{0,01} e^{-0,01t} \right]_0^{100} = -800(e^{-1} - 1) = 800(1 - e^{-1}) \approx 505,6964. \end{aligned}$$

# Zastosowania całki oznaczonej— środek ciężkości pręta

Rozważmy cienki pręt. Skierujmy oś  $OX$  wzdłuż pręta.

$\rho = \rho(x)$ — masa przypadająca na jednostkę długości pręta. Na odcinku  $[x, x + \Delta x]$  znajduje się (w przybliżeniu): masa:

$$\Delta m = \rho \Delta x$$

$\rho$  - gęstość na jednostkę długości (lub krócej gęstość).

# Masa pręta

Problem: chcemy obliczyć masę pręta

Pręt- wzdłuż osi OX

$a$ - lewy koniec;  $b$ - prawy koniec.

Przybliżona wartość masy pręta:

$$M_n = h \sum_{i=1}^n \rho(a + (i-1)h),$$

gdzie  $h = \frac{b-a}{n}$ . Jeśli założymy, że  $\rho = \rho(x)$  jest ciągła, to masa pręta jest równa:

$$m = \lim_{n \rightarrow \infty} M_n = \int_a^b \rho(x) dx.$$

# Środek ciężkości układu punktów materialnych

Środek ciężkości układu dwóch punktów

Punkty  $P_1$  i  $P_2$  leżą na prostej OX;

$P_1$ — waga  $w_1$ ; współrzędna  $x_1$ ;

$P_2$ — waga  $w_2$ ; współrzędna  $x_2$ .

Środek ciężkości:  $\frac{w_1x_1+w_2x_2}{w_1+w_2}$

Środek ciężkości układu punktów  $P_1, P_2, \dots, P_n$  o

współrzędnych  $x_1, x_2, \dots, x_n$  i wagach  $w_1, w_2, \dots, w_n$  :

$$\frac{\sum_{i=1}^n w_i x_i}{\sum_{i=1}^n w_i}.$$

# Środek ciężkości pręta

Pręt „leżący na osi OX”;

$a$  i  $b$ ;  $a < b$ ;

$\rho$  - gęstość (na jednostkę długości);  $\rho$  jest funkcją ciągłą na  $[a, b]$ .

Przybliżona wartość współrzędnej poziomej środka ciężkości:

$$S_n = \frac{\sum_{i=1}^n [a + (i-1)h] \rho(a + (i-1)h) h}{\sum_{i=1}^n \rho(a + (i-1)h) h}$$

gdzie  $h = (b - a)/n$ .

$S_n$  jest środkiem ciężkości układu punktów o współrzędnych

$$a, a + h, a + 2h, \dots, a + (n-1)h$$

o wagach

$$h\rho(a), h\rho(a + h), \dots, h\rho(a + (n-1)h).$$

## Środek ciężkości pręta— c.d.

Można pokazać, że środek ciężkości pręta (jego współrzędna pozioma) jest równy:

$$s = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{\int_a^b x \rho(x) dx}{\int_a^b \rho(x) dx}.$$

## Przykład

Chcemy obliczyć środek ciężkości pręta „położonego wzdłuż osi OX” o końcach  $a = 0$ ,  $b = 1$  [jednostka: m] o gęstości  $\rho(x) = x^2$  [jednostka: kg/m];  $\rho(x)$  jest funkcją ciągłą na przedziale  $[a, b]$ .

Rozwiązanie

$$\frac{\int_a^b x\rho(x)dx}{\int_a^b \rho(x)dx} = \frac{\int_0^1 x^3 dx}{\int_0^1 x^2 dx} = \frac{1/4}{1/3} = \frac{3}{4}.$$

## Moment bezwładności pręta

Można pokazać, że moment bezwładności pręta o końcach  $a$  i  $b$  względem osi  $x = c$  jest równy:

$$\int_a^b (x - c)^2 \rho(x) dx;$$

$\rho(x)$  jest funkcją ciągłą na przedziale  $[a, b]$ .

**Przykład** Moment bezwładności pręta o końcach:  $a = -0,5$  i  $b = 0,5$  [jednostka: m]

względem osi przechodzącej przez środek pręta (tzn. względem osi  $x = 0$ ), dla gęstości  $\rho(x) = 1$  [jednostka: kg/m], jest równy:

$$\begin{aligned} \int_{-0,5}^{0,5} (x - 0)^2 \rho(x) dx &= \int_{-0,5}^{0,5} x^2 dx = \left[ \frac{x^3}{3} \right]_{-0,5}^{0,5} = \\ &= \frac{1}{24} - \left( -\frac{1}{24} \right) = \frac{1}{12} [m^2 kg]. \end{aligned}$$