

# Ciągi liczbowe; wykład 3

dr Mariusz Grządziel

Katedra Matematyki, Uniwersytet Przyrodniczy we Wrocławiu

semestr zimowy, r. akad. 2022/2023

## Definicja (ciągu liczbowego)

*Ciągiem liczbowym nazywamy funkcję odwzorowującą zbiór liczb naturalnych w zbiór liczb rzeczywistych. Wartość tej funkcji dla liczby naturalnej  $n$  nazywamy  $n$ -tym wyrazem ciągu i oznaczamy przez  $a_n$ ,  $b_n$  itp. Ciągi o takich wyrazach oznaczamy odpowiednio przez  $(a_n)$ ,  $(b_n)$  itp. Zbiór wyrazów ciągu  $(a_n)$  oznaczamy przez  $\{a_n\}$ .*

**Uwaga 1** Niektórzy autorzy definiujemy ciąg jako funkcję określoną na dowolnym podzbiórze liczb naturalnych.

**Uwaga 2** W książkach F. Leji i H. Marcinkowskiej ciąg o wyrazach  $a_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$  oznaczany jest przez  $\{a_n\}$ .

# Sposoby określania ciągu

Ciągi liczbowe możemy określać:

(i) wzorem: np.

$$a_n = 3^n.$$

(ii) opisowo

$a_n$  –  $n$ -ta cyfra po przecinku w rozwinięciu dziesiętnym liczby  $\pi$ ;

(iii) rekurencyjnie: wyraz  $(n + 1)$ -szy jest określony jako funkcja początkowych  $n$  wyrazu ciągu; np. ciąg arytmetyczny  $(a_n)$ , którego pierwszy wyraz jest równy 1 i różnica  $r$  jest równa 2, może być określony rekurencyjnie w następujący sposób:

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = a_n + 2.$$

# Ciąg geometryczny

## Definicja

*Ciąg  $(a_n)$  określony przez*

$$a_1 = a, \quad a_{n+1} = qa_n,$$

*gdzie  $a$  i  $q$  są danymi liczbami rzeczywistymi, nazywamy ciągiem geometrycznym o pierwszym wyrazie  $a$  i ilorazie  $q$ .*

## Przykład

*W chwili  $t = 1$  liczebność populacji bakterii wynosi 1000. Po upływie czasu  $T$  liczebność populacji bakterii się podwaja. Przyjmując  $T$  za jednostkę pomiaru czasu liczebność populacji  $a_n$  w chwili  $t = n$  można określić wzorem:*

$$a_1 = 1000; \quad a_{n+1} = 2a_n.$$

## Definicja

*Ciąg  $(a_n)$  jest ograniczony z dołu, jeżeli zbiór  $\{a_n\}$  jest ograniczony z dołu, tj. istnieje  $m \in \mathbb{R}$  takie, że dla każdego  $n \in \mathbb{N}$*

$$a_n \geq m.$$

## Definicja (ciągu ograniczonego z góry)

*Ciąg  $(a_n)$  jest ograniczony z góry, jeżeli zbiór  $\{a_n\}$  jest ograniczony z góry, tj. istnieje  $M \in \mathbb{R}$  takie, że dla każdego  $n \in \mathbb{N}$*

$$a_n \leq M.$$

## Przykład

Ciąg  $b_n = \frac{n}{n+3}$  jest ograniczony z góry- ograniczeniem górnym jest np. 1.

## Definicja (ciągu ograniczonego)

*Ciąg  $(a_n)$  jest ograniczony, jeżeli zbiór  $\{a_n\}$  jest ograniczony, tj. ma zarówno ograniczenie dolne jak i górne.*

## Przykład

Ciąg

$$a_n = \frac{n}{n^2 + 1}$$

jest ograniczony. Ograniczeniem dolnym jest np. 0 a ograniczeniem górnym np. 1.

## Definicja

*Ciąg  $(a_n)$  jest rosnący, jeżeli*

$$a_1 < a_2 < a_3 < \dots, \text{ tzn. dla każdego } n \in \mathbb{N} \quad a_n < a_{n+1}.$$

Analogicznie definiujemy ciąg niemalejący:

## Definicja

*Ciąg  $(a_n)$  jest niemalejący, jeżeli*

$$a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \dots, \text{ tzn. dla każdego } n \in \mathbb{N} \quad a_n \leq a_{n+1}.$$

**Uwaga.** Analogicznie definiuje się ciąg malejący i nierosnący. Ciąg nazywamy monotonicznym, jeżeli jest nierosnący lub niemalejący.

# Pojęcie granicy ciągu

Rozważmy ciąg  $(a_n)$  określony przez  $a_n = \frac{1}{n}$ . Dla dowolnego  $\varepsilon > 0$  wszystkie, z wyjątkiem co najwyżej skończonej liczby, wyrazy tego ciągu należą do przedziału  $(0 - \varepsilon, 0 + \varepsilon)$ .

Zamiast *wszystkie z wyjątkiem co najwyżej skończonej liczby* będziemy często pisać *prawie wszystkie*.

**Definicja (słowne określenie granicy właściwej ciągu)**

*Ciąg  $(a_n)$  jest zbieżny do granicy właściwej  $a \in \mathbb{R}$ , jeśli dla dowolnego  $\varepsilon > 0$  prawie wszystkie jego wyrazy należą do przedziału  $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ .*

# Pojęcie granicy ciągu — c.d.

## Definicja (granicy właściwej ciągu)

Ciąg  $(a_n)$  jest zbieżny do granicy właściwej  $a \in \mathbb{R}$ , co zapisujemy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a,$$

wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego  $\varepsilon > 0$  istnieje  $n_0 \in \mathbb{N}$  takie, że dla każdego  $n$  naturalnego większego niż  $n_0$

$$|a_n - a| < \varepsilon.$$

Równość

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$$

często jest zapisywana krócej:  $\lim a_n = a$  lub  $a_n \rightarrow a$ .

## Granica ciągu — przykład

**Zadanie.** Korzystając z definicji granicy uzasadnij, że

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0.$$

**Rozw.** Mamy pokazać, że dla każdego  $\varepsilon > 0$  istnieje  $n_0 \in \mathbb{N}$  takie, że dla  $n > n_0$

$$\left| \frac{1}{n} - 0 \right| < \varepsilon.$$

Niech  $\varepsilon$  będzie dowolną liczbą dodatnią. Musimy znaleźć liczbę  $n_0 \in \mathbb{N}$  taką, że dla każdego  $n > n_0$  będzie spełniona nierówność  $\left| \frac{1}{n} - 0 \right| < \varepsilon$ . Mamy

$$\left| \frac{1}{n} - 0 \right| = \frac{1}{n} < \varepsilon \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } n > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Zatem za  $n_0$  można przyjąć dowolną liczbę naturalną większą niż  $\frac{1}{\varepsilon}$ .

## Granica— zastosowania geometryczne

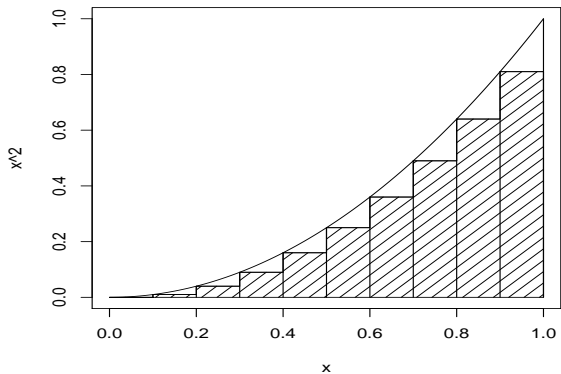
**Problem.** Chcemy obliczyć pole  $s$  figury  $S$  ograniczonej prostą  $y = 0$ , prostą  $x = 1$  i wykresem funkcji  $f(x) = x^2$ .

**Rozwiązanie przybliżone.** Dzielimy odcinek  $[0, 1]$  na  $n$  odcinków o równej długości:

$$\left[0, \frac{1}{n}\right), \left[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right), \dots, \left[\frac{n-1}{n}, 1\right).$$

Suma pól prostokątów, których podstawy są równe tym odcinkom a wysokości kwadratowi ich lewych końców, oznaczana przez  $s_n$ , jest sensownym przybliżeniem pola figury  $S$ .

Pole figury  $S$  można zdefiniować jako  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n$ .



**Rysunek:** Przybliżony sposób obliczania pola figury S

## „Przykład geometryczny” — c.d.

Mamy

$$s_n = \sum_{k=1}^n \left[ \frac{1}{n} \times \left( \frac{k-1}{n} \right)^2 \right] = \frac{1}{n^3} \frac{(n-1)n(2n-1)}{6};$$

wykorzystaliśmy równość:

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Obliczenie granicy ciągu  $(s_n)$  bezpośrednio z definicji — raczej trudne.

## Twierdzenie (o arytmetyce granic ciągów)

Jeżeli ciąg  $(a_n)$  jest zbieżny do granicy właściwej  $a$  oraz ciąg  $(b_n)$  jest zbieżny do granicy właściwej  $b$ , to

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = a + b, \quad (1)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = a - b, \quad (2)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (ca_n) = ca, \text{ gdzie } c \in \mathbb{R}, \quad (3)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_nb_n) = ab, \quad (4)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = a/b, \text{ o ile } b \neq 0, \quad (5)$$

Wniosek: ciąg  $(d_n)$  określony wzorem

$$d_n = c \frac{1}{n^k},$$

gdzie  $k$  jest ustaloną liczbą naturalną,  $c$  jest ustaloną liczbą rzeczywistą, jest zbieżny do 0.

## „Przykład geometryczny”— c.d.

Korzystając z twierdzenia o arytmetyce granic ciągów możemy obliczyć granicę ciągu  $(s_n)$  :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^3} \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} = \quad (6)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n-1)n(2n-1)}{6n^3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n-1)(2n-1)}{6n^2} = \quad (7)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 - 3n + 1}{6n^2} = \quad (8)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2}{6n^2} - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n}{6n^2} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{6n^2} = \quad (9)$$

$$= \frac{1}{3} - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{6n^2} = \frac{1}{3}. \quad (10)$$

Przy obliczeniach zostało wykorzystane Twierdzenie o arytmetyce granic ciągów.

## Liczba e

Rozważmy ciąg

$$e_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Można sprawdzić, że:

$$e_1 = 2; \quad e_2 = 2,25; \quad e_{10} = 2,594; \quad e_{100} = 2,705.$$

**Fakt.** Można pokazać, że ciąg  $(e_n)$  jest rosnący.

**Fakt.** Dla każdego  $n$  zachodzi  $e_n \leq 3$ .

Z powyższych faktów, oraz z twierdzenia, które mówi, że ciąg rosnący i ograniczony z góry jest zbieżny (por. G. Fichtenholz, rachunek różniczkowy i całkowy, t.1, rozdz. 34), wynika, że

### Twierdzenie

*Ciąg*

$$e_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

*jest zbieżny.*

Granice tego ciągu będziemy oznaczać przez  $e$  (od matematyka szwajcarskiego L. Eulera (1707-1783)):

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Liczba  $e$  z dokładnością do 10 cyfr po przecinku jest równa

2,7182818285.

## Twierdzenie

*Ciąg zbieżny ma tylko jedną granicę.*

## Definicja

*Powiemy, że ciąg  $(a_n)$  rozbieżny do nieskończoności, co będziemy zapisywać*

$$\lim a_n = \infty,$$

*jeżeli dla dowolnej liczby rzeczywistej  $P$  istnieje  $n_0 \in \mathbb{N}$  takie, że dla dowolnego  $n > n_0$*

$$a_n > P.$$

## Definicja

*Powiemy, że ciąg  $(a_n)$  rozbieżny do minus nieskończoności, co będziemy zapisywać*

$$\lim a_n = -\infty,$$

*jeżeli dla dowolnej liczby rzeczywistej  $R$  istnieje  $n_0 \in \mathbb{N}$  takie, że dla dowolnego  $n > n_0$*

$$a_n < R.$$

O ciągach rozbieżnych do  $-\infty$  lub  $\infty$  będziemy mówili, że mają granice niewłaściwe. Przykładem takiego ciągu jest

$$b_n = (-2)^n.$$

## Ćwiczenie

Uzasadnić, korzystając z definicji, że:

(a)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[3]{n} = \infty;$$

(b)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (2 - n^2) = -\infty;$$

(c)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (2^n - 8) = \infty.$$

## Ćwiczenie

*Uzasadnić, korzystając z definicji, że ciąg geometryczny  $(q^n)$  jest:*

- (a) zbieżny do 0, jeżeli  $|q| < 1$ ;*
- (b) rozbieżny do  $\infty$ , jeżeli  $q > 1$ .*

## Ćwiczenie

Obliczyć granice

(a)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 3}{n - 3n^2};$$

(b)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n + 3}{3^n};$$

(c)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n}{n+1} \right)^{2n}.$$