

Pojęcia zbioru i funkcji

dr Mariusz Grządziel

Katedra Matematyki, Uniwersytet Przyrodniczy we Wrocławiu

Wykłady 1 i 2; rok akademicki 2022/2023

Analiza matematyczna I

Analiza matematyczna (rachunek różniczkowy jest jej częścią):
matematyka zmiany i ruchu.

Popularny pogląd: twórcami analizy matematycznej są Isaac
Newton (1643-1727) i Gottfried Leibniz (1646-1716).

Analiza matematyczna II

- ▶ Próba kontynuacji prac matematycznych Galileusza i Keplera: sformułowanie dwóch zagadnień: (1) zagadnienie stycznych polegające na wyznaczeniu stycznych do danej krzywej, (2) zagadnienie kwadratury, czyli wyznaczenie pola pod daną krzywą, które z kolei jest podstawą rachunku całkowego.
- ▶ wkład Newtona i Leibniza: wykazanie związku pomiędzy (1) i (2), ujednoczenie metod dotychczas stosowanych oraz wprowadzenie wygodnej notacji; do tych wyników doszli niezależnie, por. hasło „Rachunek różniczkowy i całkowy” w Wikipedii.

Podstawowe pojęcia analizy matematycznej: liczba, zbiór, funkcja.

Pojęcie zbioru I

Pojęcie zbioru – jedno z podstawowych w matematyce.

Przykłady: zbiór wszystkich książek w bibliotece, zbiór wszystkich liter alfabetu łacińskiego, zbiór wszystkich liczb całkowitych.

Przedmioty, które należą do danego zbioru, nazywamy jego elementami.

Zdanie orzekające, że element a należy do zbioru A (czyli że a jest elementem zbioru A) zapisujemy

$$a \in A.$$

Zapis

$$a, b \in A$$

oznacza

$$a \in A \quad \text{i} \quad b \in A.$$

Z tej konwencji można korzystać w przypadku, gdy liczba elementów należących do danego zbioru jest większa niż dwa.

Pojęcie zbioru II

Jeżeli a nie należy do zbioru A piszemy

$$a \notin A.$$

Zbiór pusty będziemy oznaczać przez \emptyset .

Zbiór, którego wszystkim elementami są a_1, \dots, a_n będziemy oznaczać:

$$\{a_1, \dots, a_n\}.$$

Zawieranie się zbiorów

Jeżeli każdy element zbioru A jest elementem zbioru B , to mówimy, że A jest podzbiorem zbioru B , lub że A jest zawarty w B ; zapisujemy to

$$A \subset B.$$

Suma zbiorów

Przez sumę zbiorów A i B , oznaczaną $A \cup B$, rozumiemy zbiór, którego elementami są wszystkie elementy zbioru A i wszystkie elementy zbioru B , i który żadnych innych elementów nie zawiera.

Iloczyn zbiorów

Przez iloczyn zbiorów A i B , oznaczany $A \cap B$, rozumiemy część wspólną tych zbiorów, czyli zbiór zawierający te i tylko te elementy, które jednocześnie do zbioru A i zbioru B .

Różnica zbiorów

Różnicą zbiorów A i B , oznaczaną $A \setminus B$, nazywamy zbiór z tych i tylko tych elementów, które należą do zbioru A i nie należą do zbioru B .

Niech $A = \{1, 2\}$, $B = \{2, 3\}$ i $C = \{1, 2, 3\}$. Mamy:

$$A \cap B = \{2\} \quad A \cup B = C, \quad B \subset C, \quad A \setminus B = \{1\}.$$

Typy liczb

- ▶ zbiór wszystkich liczb naturalnych: $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$;
- ▶ zbiór wszystkich liczb całkowitych:
 $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$;
- ▶ zbiór wszystkich liczb wymiernych \mathbb{Q} ;
- ▶ zbiór wszystkich liczb rzeczywistych \mathbb{R} .

Przedziały

- ▶ (a, b) oznacza zbiór wszystkich liczb rzeczywistych x spełniających warunek $a < x < b$;
- ▶ $[a, b)$ oznacza zbiór wszystkich liczb rzeczywistych x spełniających warunek $a \leq x < b$;
- ▶ $(a, b]$ oznacza zbiór wszystkich liczb rzeczywistych x spełniających warunek $a < x \leq b$;
- ▶ $[a, b]$ oznacza zbiór wszystkich liczb rzeczywistych x spełniających warunek $a \leq x \leq b$.

W powyższych definicjach a może przyjąć wartość $-\infty$ (gdy dany przedział jest lewostronnie otwarty) a b wartość ∞ (gdy dany przedział jest prawostronnie otwarty).

Zbiory ograniczone i kresy I

Definicja

Zbiór $A \subset \mathbb{R}$ jest:

- ▶ ograniczony z dołu, jeżeli istnieje liczba rzeczywista m taka, że $m \leq x$ dla każdego $x \in A$;
- ▶ ograniczony z góry, jeżeli istnieje liczba rzeczywista M taka, że $M \geq x$ dla każdego $x \in A$;
- ▶ ograniczony, jeżeli jest ograniczony z dołu oraz z góry.

Definicja

Niech zbiór $A \subset \mathbb{R}$ będzie ograniczony z dołu. Największą liczbę ograniczającą ten zbiór z dołu będziemy nazwać jego kresem dolnym i oznaczać $\inf A$.

Dla zbioru A , który nie jest ograniczony z dołu będziemy przyjmować $\inf A = -\infty$.

Zbiory ograniczone i kresy II

Definicja

Niech zbiór $A \subset \mathbb{R}$ będzie ograniczony z góry. Najmniejszą liczbę ograniczającą ten zbiór z góry będziemy nazwać jego kresem górnym i oznaczać $\sup A$.

Dla zbioru A , który nie jest ograniczony z góry będziemy przyjmować $\sup A = \infty$.

Aksjomat ciągłości: każdy zbiór ograniczony z dołu ma kres dolny, każdy zbiór ograniczony z góry ma kres górny.

Funkcje jednej zmiennej

Definicja (funkcji jednej zmiennej)

Funkcją (jednej zmiennej) określoną na zbiorze $X \subset \mathbb{R}$ o wartościach w zbiorze $Y \subset \mathbb{R}$ nazywamy przyporządkowanie każdemu elementowi $x \in X$ dokładnie jednego elementu $y \in Y$. Funkcję taką oznaczamy np. $f: X \rightarrow Y$ (można użyć również innych liter na oznaczenie funkcji). Wartość funkcji f w punkcie x oznaczamy przez $f(x)$.

Definicja (dziedziny i zbioru wartości)

Niech $f: X \rightarrow Y$. Wtedy zbiór X nazywamy dziedziną funkcji f i oznaczamy przez D_f , a zbiór wartości funkcji f oznaczamy przez W_f . Jeżeli dany jest tylko wzór określający funkcję, to zbiór tych elementów z \mathbb{R} , dla których wzór ten ma sens, nazywamy dziedziną naturalną funkcji.

Definicja (równości funkcji)

Mówimy, że dwie funkcje są sobie równe, jeśli:

(i) ich dziedziny są sobie równe;

(ii) dla wszystkich elementów (wspólnej) dziedziny przybierają równe wartości.

Przykłady. (i) funkcje $f(x) = 1 + x$, $g(x) = \frac{1-x^2}{1-x}$ nie są sobie równe — ponieważ ich dziedziny naturalne D_f i D_g nie są sobie równe.

(ii) funkcje $f(x) = x^2$ i $g(x) = \sqrt{x^4}$ są sobie równe.

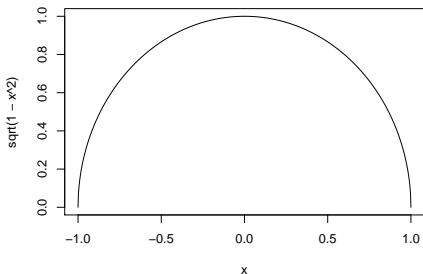
Zawężenie (obcięcie, restrykcja) funkcji

Dla funkcji $f: X \rightarrow Y$ można określić jej zawężenie, nazywane też obcięciem lub ograniczeniem, do zbioru $M \subset X$. Jest to funkcja $f|_M: M \rightarrow Y$ taka, że $f|_M(x) = f(x)$ dla każdego $x \in M$.

Definicja (wykresu funkcji)

Wykresem funkcji $f : X \rightarrow Y$ nazywamy zbiór par $(x, f(x))$ utworzony dla wszystkich elementów x zbioru X .

Przykład. Dla funkcji $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ określonej wzorem $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ wykresem jest „górną połówką okręgu” o środku w początku układu współrzędnych i o promieniu 1



Rysunek: Wykres funkcji $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$

Funkcja liniowa

Dla danych $a, b \in \mathbb{R}$ funkcję liniową f definiujemy wzorem:

$$f(x) = ax + b. \quad (1)$$

Współczynnik a nazywamy współczynnikiem kierunkowym prostej, a współczynnik b wyrazem wolnym.

Potęgowanie

Dla dowolnej liczby dodatniej a oraz liczby wymiernej $w = p/q$ definiujemy:

$$a^w = (a^{1/q})^p.$$

Powyższa definicja ma sens także dla a ujemnych, jeśli q jest nieparzyste.

Dla x niewymiernego możemy obliczyć zadaną dokładnością a^x znajdując wartości a^{x_1}, a^{x_2}, \dots , gdzie x_k oznacza przybliżenie dziesiętne liczby x wyrażone dokładnością do k miejsc po przecinku. Obliczanie kolejnych wartości a^{x_k} należy kontynuować do momentu, w którym błąd przybliżenia $|a^x - a^{x_k}|$ będzie mniejszy niż zadana liczba dodatnia.

Funkcja potęgowa

Funkcja, która przyporządkowuje argumentowi $x \in D$, gdzie D jest zbiorem liczb rzeczywistych lub jego odpowiednim podzbiorem, potęgę x^p , gdzie p jest liczbą rzeczywistą, nazywamy funkcją potęgową.

Funkcje wielomianowe

Funkcję

$$W(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n,$$

gdzie a_0, \dots, a_n są ustalonymi liczbami rzeczywistymi, nazywamy funkcją wielomianową.

- ▶ łatwo można obliczyć ich wartość;
- ▶ mogą opisać bogactwo kształtów badanych obiektów — w naukach przyrodniczych i ekonomicznych.

Funkcja wykładnicza

Dla a dodatniego i różnego od 1 definiujemy funkcję

$$f(x) = a^x.$$

Dziedziną funkcji jest zbiór liczb rzeczywistych \mathbb{R} .

Funkcja wykładnicza jest stosowana do modelowania procesów wzrostu populacji, rozpadu promieniotwórczego itd.

Funkcja logarytmiczna

Logarytmem o podstawie a , $0 < a \neq 1$ z liczby dodatniej x nazywamy liczbę rzeczywistą y , dla której

$$a^y = x.$$

Funkcja logarytmiczna, dla ustalonej podstawy $0 < a \neq 1$ przyporządkowuje argumentowi $x > 0$ logarytm $\log_a x$.

Złożenie funkcji

Definicja

Niech X, Y, Y_1, Z będą podzbiorami \mathbb{R} , $Y \subset Y_1$ oraz niech $f: X \rightarrow Y$, $g: Y_1 \rightarrow Z$. Złożeniem funkcji g i f nazywamy funkcję $(g \circ f): X \rightarrow Z$ określoną wzorem:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) \quad \text{dla } x \in X.$$

Przykłady. (i) Dla $f(x) = 2x + 1$ i $g(x) = 2x$ (dziedziny D_f i D_g są równe \mathbb{R}) złożenie $g \circ f$ będzie równe funkcji $h(x) = 4x + 2$, $D_h = \mathbb{R}$.

(ii) funkcja $h(x) = \sin(x^2)$ może być wyrażona jako złożenie funkcji $f(x) = x^2$ i $g(x) = \sin(x)$:

$$h(x) = (g \circ f)(x), \quad D_h = \mathbb{R};$$

Funkcje różnowartościowe i funkcje „na”

Definicja

Powiemy, że funkcja f jest różnowartościowa na zbiorze A zawartym w jej dziedzinie D_f , jeżeli dla dowolnych $x_1, x_2 \in D_f$ z nierówności $x_1 \neq x_2$ wynika $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Definicja

Powiemy, że funkcja f odwzorowuje zbiór X na zbiór Y (funkcja $f : X \mapsto Y$ jest „na”) jeżeli zbiór wartości tej funkcji W_f spełnia warunek

$$W_f = Y. \quad (2)$$

O funkcji $f : X \mapsto Y$ spełniającej warunek (2) powiemy, że jest „na” lub że jest *suriekcją*.

Definicja

Powiemy, że funkcja $f : X \mapsto Y$ jest wzajemnie jednoznaczna (jest *bijekcją*), jeżeli różnowartościowa na X i „na” (jest różnowartościową *suriekcją*).

Pojęcie funkcji odwrotnej

Definicja

Niech funkcja $f : X \mapsto Y$ będzie bijekcją. Powiemy, że funkcja h odwrotna do f , jeżeli:

- ▶ dziedzina funkcji h jest równa Y ;
- ▶ zbiór wartości h jest równy X ;
- ▶ dla każdego $y \in Y$ jest spełniony warunek: jeżeli $y = f(x)$ to $x = h(y)$,

co zapisujemy $h = f^{-1}$.

Fakt: Jeśli funkcja f jest bijekcją, to $(f^{-1})^{-1} = f$.

Przykłady funkcji odwrotnych



$$f_1(x) = 2^x, \quad g_1(y) = f^{-1}(y) = \log_2(y);$$

powyższy zapis jest formą skróconą zapisu:

$f_1 : \mathbb{R} \mapsto (0, \infty)$ określona wzorem $f_1(x) = 2^x$ i

$g_1 : (0, \infty) \mapsto \mathbb{R}$ określona wzorem $g_1(y) = \log_2(y)$;



$$f_2(x) = x^2, \quad g_2(y) = f_2^{-1}(y) = \sqrt{y};$$

dziedziny f_2 i g_2 : naturalne.

Definicja (funkcji okresowej)

Funkcja $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ jest okresowa, jeśli istnieje $T > 0$ takie, że dla każdego $x \in X$

$$x \pm T \in X \quad \text{oraz} \quad f(x + T) = f(x).$$

Liczbę T nazywamy okresem funkcji f . Jeżeli istnieje najmniejszy okres funkcji f , to nazywamy go okresem podstawowym.

Funkcja Dirichleta

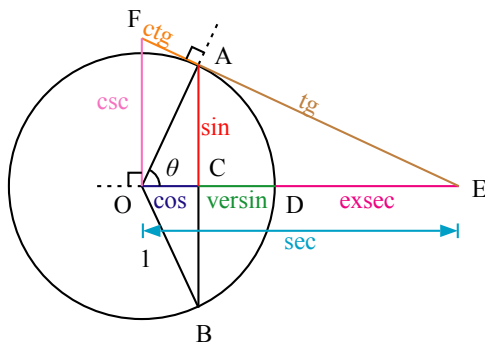
$$D: \mathbb{R} \mapsto \{0, 1\}$$

$$D(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}; \\ 0, & x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Funkcja D jest okresowa, nie posiada jednak okresu podstawowego.

Funkcje trygonometryczne

Funkcje trygonometryczne sinus i kosinus są funkcjami okresowymi. Ich okres podstawowy jest równy 2π



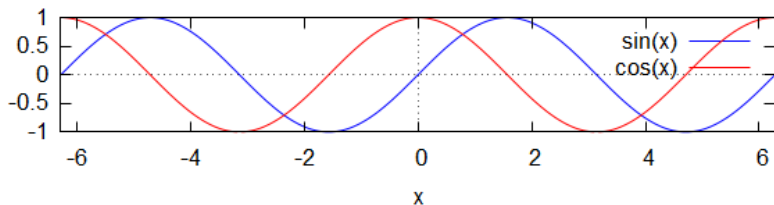
Źródło:

pl.wikipedia.org/wiki/Funkcje_trygonometryczne

plik (z rysunkiem) udostępniony został licencji Creative Commons 3.0, Uznanie Autorstwa- Na tych samych warunkach

Funkcje sinus i cosinus

Funkcje trygonometryczne sinus i cosinus są funkcjami okresowymi. Ich okres podstawowy jest równy 2π



Funkcje cyklotometryczne I

Definicja

Funkcją arkus sinus (oznaczaną symbolem \arcsin) nazywamy funkcję odwrotną do

$$s(x) = \sin(x), \quad D_s = [-\pi/2, \pi/2],$$

tj. do funkcji sinus obciętej do przedziału $[-\pi/2, \pi/2]$.

Np. $\arcsin(\frac{1}{\sqrt{2}}) = \pi/4$ bo $\sin(\pi/4) = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Funkcje cyklotometryczne III

Definicja

Funkcją arkus cosinus (oznaczaną symbolem \arccos) nazywamy funkcję odwrotną do

$$c(x) = \cos(x), \quad D_c = [0, \pi],$$

tj. do funkcji cosinus obciętej do przedziału $[0, \pi]$.

Np. $\arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{3\pi}{4}$ bo

$$\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

Funkcje cyklotometryczne V

Definicja

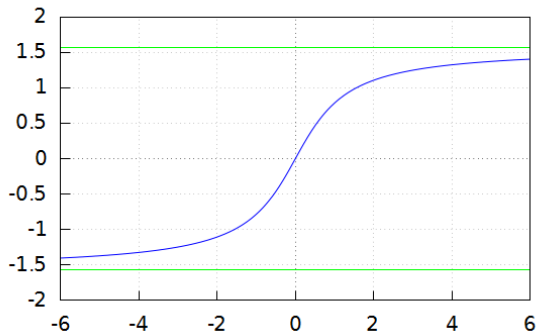
Funkcją arkus tangens (oznaczaną symbolem arc tg) nazywamy funkcję odwrotną do

$$t(x) = \text{tg } x, \quad D_t = (-\pi/2, \pi/2),$$

tj. do funkcji tangens obciętej do przedziału $(-\pi/2, \pi/2)$.

Funkcje cyklometryczne VI

Wykres funkcji arkus tangens



Definicja (funkcji ograniczonej)

Funkcja f jest na zbiorze (będącym podzbiorem jej dziedziny D_f):

- ▶ ograniczona z dołu, jeśli jej zbiór wartości jest ograniczony z dołu;
- ▶ ograniczona z góry, jeśli jej zbiór wartości jest ograniczony z góry;
- ▶ ograniczona, jeśli jest zarówno ograniczona z dołu jak i z góry.

Przykłady. (i) Funkcja $f(x) = \frac{1}{x}$ na zbiorze $(0, \infty)$ jest ograniczona z dołu, ale nie jest ograniczona z góry;
(ii) funkcja $g(x) = x^2$ jest ograniczona na zbiorze $[1, 2]$.

Definicja (funkcji rosnącej)

Funkcja f jest rosnąca na zbiorze $A \subset D_f$, jeśli dla każdych $x_1, x_2 \in A$

$$f(x_1) < f(x_2) \quad \text{jeśli} \quad x_1 < x_2.$$

Definicja (funkcji malejącej)

Funkcja f jest malejąca na zbiorze $A \subset D_f$, jeśli dla każdych $x_1, x_2 \in A$

$$f(x_1) > f(x_2) \quad \text{jesli} \quad x_1 < x_2.$$

Definicja (funkcji niemalejącej)

Funkcja f jest niemalejąca na zbiorze $A \subset D_f$, jeśli dla każdych $x_1, x_2 \in A$

$$f(x_1) \leq f(x_2) \quad \text{jesli} \quad x_1 < x_2.$$

Definicja (funkcji nierosnącej)

Funkcja f jest nierosnąca na zbiorze $A \subset D_f$, jeśli dla każdych $x_1, x_2 \in A$

$$f(x_1) \geq f(x_2) \quad \text{jesli} \quad x_1 < x_2.$$

Definicja (funkcji monotonicznej)

Funkcja f jest monotoniczna na zbiorze $A \subset D_f$, jeśli jest nierosnąca lub niemalejąca na tym zbiorze; funkcję f nazywamy ściśle monotoniczną, jeśli jest malejąca lub rosnąca na tym zbiorze.

Polecana literatura

Błaszczyk, A., Turek, S., Matematyka. Od podstaw do elementów matematyki wyższej. PWN, Warszawa 2015.

Gewert, M., Skoczylas, Z., Analiza matematyczna 1. Definicje, twierdzenia, wzory. Wyd. 25, Oficyna Wydawnicza GiS, Wrocław 2017.

Gewert, M., Skoczylas, Z., Wstęp do analizy i algebry. Wyd. 3, Oficyna Wydawnicza GiS, Wrocław 2014.

Herman, E., Strang, G., Calculus, Vol. 1. Openstax Foundation, Rice University, 2016.

Leja, F., Rachunek różniczkowy i całkowy. Wyd. 17, PWN, Warszawa 2012.

Kowalczyk, R., Niedziałomski, K. i Obczyński, C., Matematyka dla studentów i kandydatów na wyższe uczelnie. PWN, Warszawa 2013.

Zakrzewski, M., Markowe wykłady z matematyki. Analiza. Oficyna Wydawnicza GiS, Wrocław 2013.

Zakrzewscy, D. i M., Repetytorium z matematyki. Wydawnictwo szkolne PWN, Wrocław 2002.