

Granica funkcji

dr Mariusz Grządziel

Katedra Matematyki, Uniwersytet Przyrodniczy we Wrocławiu

rok akademicki 2022/2023, semestr zimowy

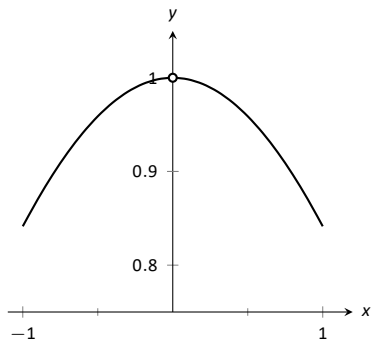
Wykład oparty jest na podręczniku:
G. Hartman i in., APEX Calculus, Wer. 4, który jest
udostępniony na licencji: Creative Commons
Attribution-Noncomercial 4.0.

Prezentacja zapisana w tym pliku również są udostępnione na
zasadach tej licencji.

Pojęcie granicy funkcji w punkcie

Rozważmy funkcję f określoną wzorem

$$f(x) = \frac{\sin x}{x}, \quad x \neq 0.$$



Rysunek: Wykres funkcji $f(x) = \frac{\sin x}{x}$.

Na tym slajdzie i kilku następnym separatorem dziesiętnym jest kropka.

x	$\sin(x)/x$
-0.1	0.9983341665
-0.01	0.9999833334
-0.001	0.9999998333
0	nieokreślony
0.001	0.9999998333
0.01	0.9999833334
0.1	0.9983341665

Tabela: Wartości $\frac{\sin x}{x}$ dla x bliskiego 0.

x	$\sin(x)/x$
0.4	0.9735458558
0.49	0.9604609963
0.499	0.9590134599
0.5	0.9588510772
0.501	0.9586883858
0.51	0.9572102880
0.6	0.9410707890

Tabela: Wartości funkcji $\frac{\sin x}{x}$ dla x bliskiego 0.5

Nieformalna definicja granicy funkcji w punkcie

Niech f będzie funkcją określoną na zbiorze $(x_0 - r, x_0) \cup (x_0, x_0 + r)$ dla danego x_0 i pewnego $r > 0$. Wyrażenie „granica $f(x)$ gdy x dąży do x_0 ” oznacza liczbę, którą oznaczmy przez L , do której dąży $f(x)$, gdy x dąży do x_0 . Będziemy używać notacji:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L. \quad (1)$$

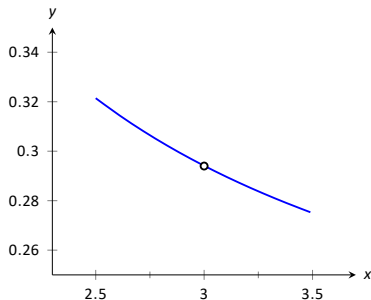
Tabele oraz wykres sugerują, że:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \approx 1 \quad \text{i} \quad \lim_{x \rightarrow 0.5} \frac{\sin x}{x} \approx 0.959.$$

Przykład

Rozważmy funkcję f określoną wzorem

$$f(x) = \frac{x^2 - x - 6}{6x^2 - 19x + 3}.$$



Rysunek: Wykres funkcji f

x	$\frac{x^2-x-6}{6x^2-19x+3}$
2.9	0.29878
2.99	0.294569
2.999	0.294163
3	nieokreślony
3.001	0.294073
3.01	0.293669
3.1	0.289773

Tabela: Wartości funkcji $f(x) = \frac{x^2-x-6}{6x^2-19x+3}$

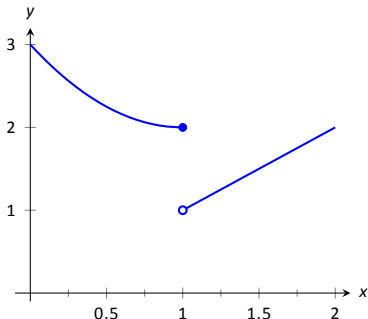
Wykres i tabela sugerują, że

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) \approx 0.294.$$

Przykłady sytuacji, gdy granice nie istnieją I

Rozważmy funkcję g określoną wzorem

$$g(x) = \begin{cases} x^2 - 2x + 3 & \text{dla } x \leq 1; \\ x, & \text{dla } x > 1. \end{cases}$$



Rysunek: Wykres funkcji g

Przykłady sytuacji, gdy granice nie istnieją II

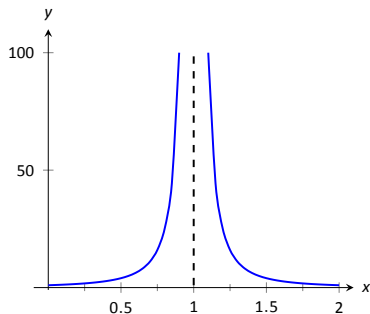
x	$g(x)$
0.9	2.01
0.99	2.0001
0.999	2.000001
1.001	1.001
1.01	1.01
1.1	1.1

Tabela: Wartości funkcji g

Przykłady sytuacji, gdy granice nie istnieją III

Rozważmy funkcję h określoną wzorem

$$h(x) = \frac{1}{(x-1)^2}$$

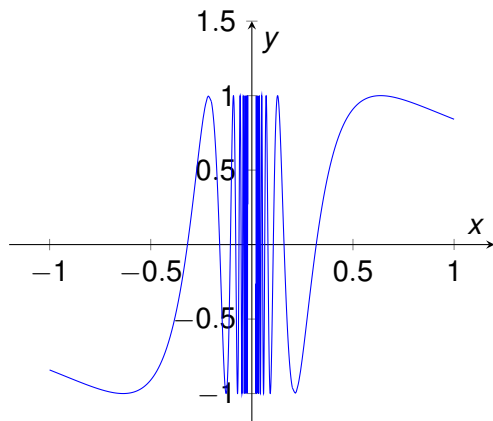


Rysunek: Wykres funkcji h

Przykłady sytuacji, gdy granice nie istnieją IV

Wykres funkcji h określonej wzorem

$$h(x) = \sin \frac{1}{x}.$$



Granica funkcji — definicja Cauchy'ego

Oznaczenia

$$S(x_0, r) = (x_0 - r, x_0) \cup (x_0, x_0 + r), \quad x_0 \in \mathbb{R}, \quad r > 0.$$

Definicja 1

Niech $x_0 \in \mathbb{R}$ oraz niech funkcja f będzie funkcją określoną przynajmniej na sąsiedztwie $S(x_0, r)$ dla pewnego $r > 0$. Liczba g jest granicą właściwą funkcji f w punkcie x_0 , co zapisujemy

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = g, \quad (2)$$

wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego $\epsilon > 0$ istnieje $\delta > 0$ takie, że dla dowolnego $x \in S(x_0, r)$:

$$\text{jeżeli } 0 < |x - x_0| < \delta, \quad \text{to } |f(x) - g| < \epsilon.$$

Granica funkcji — definicja Heinego

Definicja 2

Niech $x_0 \in \mathbb{R}$ oraz niech funkcja f będzie funkcją określoną przynajmniej na sąsiedztwie $S(x_0, r)$ dla pewnego $r > 0$. Liczba g jest granicą właściwą funkcji f w punkcie x_0 wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego ciągu punktów (x_n) z sąsiedztwa $S(x_0, r)$ zbieżnego do x_0 mamy:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = g.$$

Można udowodnić, że podane definicje granicy funkcji w punkcie są równoważne.

Przykład

Chcemy uzasadnić, że

$$\lim_{x \rightarrow 4} \sqrt{x} = 2.$$

Funkcja $f(x) = \sqrt{x}$ jest określona na $S(4, 2)$.

Założmy, że $\epsilon < 2$. Wtedy nierówność $|f(x) - 2| < \epsilon$ jest równoważna z:

$$(2 - \epsilon)^2 < x < (2 + \epsilon)^2$$

$$4 - 4\epsilon + \epsilon^2 < x < 4 + 4\epsilon + \epsilon^2$$

$$4 - (4\epsilon - \epsilon^2) < x < 4 + (4\epsilon + \epsilon^2)$$

Więc można przyjąć $\delta < 4\epsilon - \epsilon^2$.

Twierdzenie o granicach właściwych funkcji

Twierdzenie 1 (o arytmetyce granic funkcji)

Niech b, c, L i K będą ustalonymi liczbami rzeczywistymi, n daną liczbą naturalną; niech funkcje f i g będą określone na $S(x_0, r)$ dla ustalonego $x_0 \in \mathbb{R}$ i pewnego $r > 0$. Jeżeli funkcje f i g mają granice właściwe w punkcie x_0 równe, odpowiednio, L i K , to

$$\lim_{x \rightarrow c} b = b, \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow c} x = c, \quad (4)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) = L + K, \quad (5)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - g(x)) = L - K, \quad (6)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (cf(x)) = cL, \quad (7)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x)) = LK, \quad (8)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{K}, \text{ o ile } K \neq 0, \quad (9)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{L}; \text{ dla } n \text{ parzystego zakładamy } f(x) \geq 0 \text{ na } S(x_0, r). \quad (10)$$

Zakładamy, że we wzorze (10) L jest nieujemne w przypadku, gdy n jest parzyste.

Granica funkcji złożonej

Twierdzenie 2

Założmy, że funkcja f ma w punkcie x_0 granicę właściwą y_0 i $f(x) \neq y_0$ dla $x \in S(x_0, r)$ dla pewnego $r > 0$, oraz że funkcja g ma w punkcie y_0 granicę właściwą q . Funkcja $g \circ f$ ma wtedy w punkcie x_0 granicę q , czyli

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(f(x)) = q.$$

Uwaga 1

Jeżeli założymy, że

$$\lim_{y \rightarrow y_0} g(y) = g(y_0),$$

wtedy założenie: $f(x) \neq y_0$ dla $x \in S(x_0, r)$ dla pewnego $r > 0$ może być pominięte.

Przykłady

Niech

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 2, \quad \lim_{x \rightarrow 3} g(x) = 3, \quad \text{i} \quad p(x) = 3x^2 - 5x + 7.$$

Obliczyć:

- ▶ $\lim_{x \rightarrow 2} (f(x) + g(x));$
- ▶ $\lim_{x \rightarrow 2} (5f(x) + [g(x)]^2);$
- ▶ $\lim_{x \rightarrow 2} p(x).$

Twierdzenie 3

Niech $p(x)$ i $q(x)$ będą wielomianami a c ustaloną liczbą rzeczywistą. Wtedy:

- ▶ $\lim_{x \rightarrow c} p(x) = p(c)$
- ▶ $\lim_{x \rightarrow c} \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{p(c)}{q(c)}$, jeżeli $q(c) \neq 0$.

Kilka ważnych granic

Twierdzenie 4

Niech c będzie liczbą rzeczywistą należącą do dziedziny funkcji rozważanej w zadanym podpunkcie. Prawdziwe są równości:

1. $\lim_{x \rightarrow c} \sin x = \sin c$;
2. $\lim_{x \rightarrow c} \cos x = \cos c$;
3. $\lim_{x \rightarrow c} \operatorname{tg} x = \operatorname{tg} c$;
4. $\lim_{x \rightarrow c} a^x = a^c$, $1 \neq a > 0$;
5. $\lim_{x \rightarrow c} \ln x = \ln c$.

Przykłady

Wyznaczyć:

1. $\lim_{x \rightarrow \pi/2} \cos x$;
2. $\lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{1}{\cos^2 x} - \operatorname{tg}^2 x \right)$;
3. $\lim_{x \rightarrow \pi/2} \cos x \sin x$;
4. $\lim_{x \rightarrow 1} e^{\ln x}$.

Twierdzenie o trzech funkcjach

Twierdzenie 5

Niech f , g i h będą funkcjami określonymi na sąsiedztwie $S(x_0, r)$ danego punktu x_0 dla pewnego $r > 0$ spełniającymi warunek

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x) \quad \text{dla } x \in S(x_0, r).$$

Jeżeli

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L = \lim_{x \rightarrow x_0} h(x)$$

dla pewnego $L \in \mathbb{R}$, to

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = L.$$

Przykład

Chcemy obliczyć

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}.$$

Z rozważań geometrycznych wynika, że:

$$\sin x \leq x \leq \operatorname{tg} x \quad \text{dla} \quad x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right),$$

por.: Hanna Marcinkowska „Analiza Matematyczna. Funkcje jednej zmiennej” str. 137; książka jest dostępna pod adresem:

<http://www.math.uni.wroc.pl/analiza-1>

Wynika stąd, że:

$$1 \geq \frac{\sin x}{x} \geq \cos x$$

dla $x \in (-\pi/2, 0) \cup (0, \pi/2)$.

Z twierdzenie o trzech funkcjach wynika, że

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Granice funkcji— przykłady

1.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x} = 0;$$

2.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1;$$

3.

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e.$$

Dowody tych twierdzeń są niebanalne.

Przykład

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x + 1) = 2.$$

Pierwsza z równości wynika stąd, że wartości funkcji

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1} \quad \text{i} \quad g(x) = x + 1$$

są równe na $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Twierdzenie 6

Niech funkcje f i g będą równe na $S(x_0, r)$ dla danego $x_0 \in \mathbb{R}$ i pewnego $r > 0$. Jeżeli $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = L$ dla pewnej liczby rzeczywistej L , to

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L.$$

Przykład

Korzystając z Twierdzenia o arytmetyce granic funkcji i Twierdzenia 6 można uzasadnić, że

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{x^5 - 1} = \frac{1}{5}.$$

Przykład

Niech $f(x) = -1,5x^2 + 11,5x$. $f(x)$ oznacza położenie punktu poruszającego się wzdłuż prostej OX w czasie x .

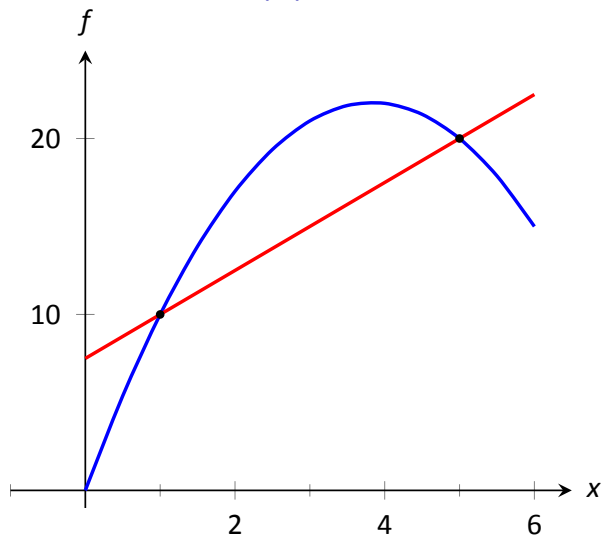
Wyznaczyć

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}.$$

Uwaga: $\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$ to „średnią prędkość na odcinku czasowym $[1, 1+h]$ ”.

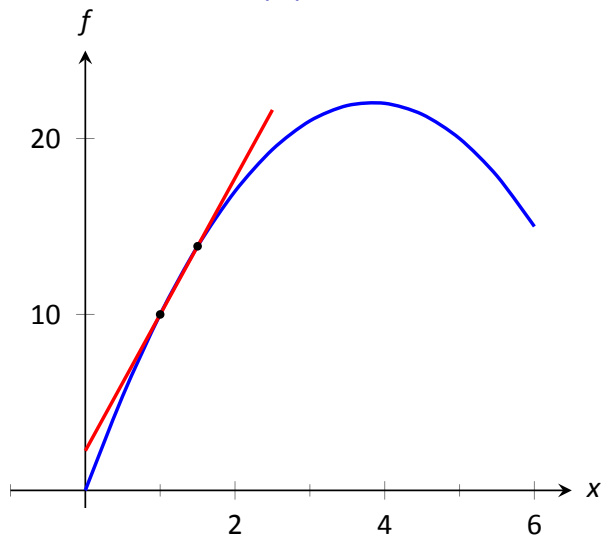
$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-1,5(1+h)^2 + 11,5(1+h) - (-1,5)(1)^2 + 11,5(1)}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-1,5(1+2h+h^2) + 11,5 + 11,5h - 10}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-1,5(1+2h+h^2) + 11,5 + 11,5h - 10}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} (-1,5h + 8,5) = 8,5. \end{aligned}$$

Iloraz różnicowy: $f(x) = -1,5x^2 + 11,5x$, $h = 4$



$$\frac{f(5) - f(1)}{5 - 1} = \frac{10}{4} = 2,5.$$

Iloraz różnicowy: $f(x) = -1,5x^2 + 11,5x$, $h = 0,5$



$$\frac{f(1,5) - f(1)}{1,5 - 1} = \frac{3,875}{0,5} = 7,75.$$

Granica prawostronna

Definicja 3

Dla $x_0 \in \mathbb{R}$ i $r > 0$ przedział $(x_0, x_0 + r)$ będziemy nazywać prawostronnym sąsiedztwem punktu x_0 o promieniu r i oznaczać $S^+(x_0, r)$.

Definicja 4

Niech $x_0 \in \mathbb{R}$ oraz niech funkcja f będzie funkcją określoną przynajmniej na sąsiedztwie prawostronnym $S^+(x_0, r)$ dla pewnego $r > 0$. Liczba g jest granicą właściwą prawostronną funkcji f w punkcie x_0 , co zapisujemy

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = g, \quad (11)$$

wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego $\epsilon > 0$ istnieje $\delta > 0$ takie, że dla dowolnego $x \in S^+(x_0, r)$:

$$\text{jeżeli } 0 < x - x_0 < \delta, \quad \text{to } |f(x) - g| < \epsilon.$$

Granica lewostronna

Definicja 5

Dla $x_0 \in \mathbb{R}$ i $r > 0$ przedział $(x_0 - r, x_0)$ będziemy nazywać lewostronnym sąsiedztwem punktu x_0 o promieniu r i oznaczać $S^-(x_0, r)$.

Definicja 6

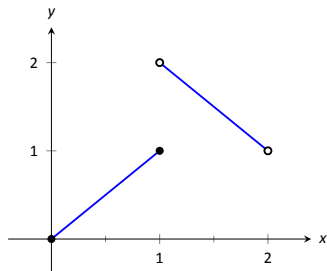
Niech $x_0 \in \mathbb{R}$ oraz niech funkcja f będzie funkcją określoną przynajmniej na sąsiedztwie prawostronnym $S^-(x_0, r)$ dla pewnego $r > 0$. Liczba g jest granicą właściwą lewostronną funkcji f w punkcie x_0 , co zapisujemy

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = g, \quad (12)$$

wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego $\epsilon > 0$ istnieje $\delta > 0$ takie, dla dowolnego $x \in S^-(x_0, r)$:

$$\text{jeżeli } 0 < x_0 - x < \delta, \quad \text{to } |f(x) - g| < \epsilon.$$

Granice jednostronne — przykłady

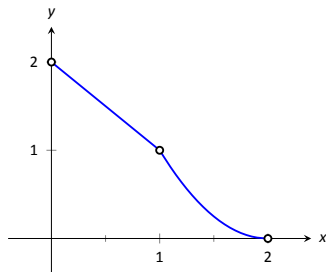


Rysunek: Wykres funkcji f

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq 1; \\ 3 - x, & 1 < x < 2. \end{cases}$$

Mamy: $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 1$, $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 2, \dots$

Granice jednostronne — przykłady, c. d.

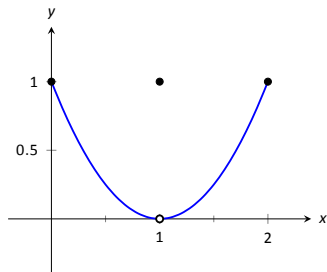


Rysunek:

$$f(x) = \begin{cases} 2 - x, & 0 < x < 1; \quad x \neq 1 \\ (x - 2)^2, & 1 < x < 2. \end{cases}$$

Mamy: $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 1$, $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 1, \dots$

Granice jednostronne — przykłady, c. d.

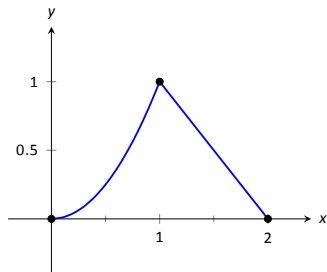


Rysunek:

$$f(x) = \begin{cases} (x-1)^2, & 0 \leq x \leq 2; \quad x \neq 1; \\ 1, & x = 1. \end{cases}$$

Mamy: $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 0$, $f(1) = 1, \dots$

Granice jednostronne — przykłady, c. d.



Rysunek:

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & 0 \leq x \leq 1; \\ 2 - x, & 1 < x \leq 2. \end{cases}$$

Mamy: $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 1$, $f(1) = 1, \dots$

Funkcje ciągłe

Definicja 7 (funkcji ciągłej w punkcie)

Niech $x_0 \in \mathbb{R}$ oraz niech funkcja f będzie określona przynajmniej na otoczeniu $(x_0 - r, x_0 + r)$, gdzie r jest pewną liczbą dodatnią. Funkcja f jest ciągła w punkcie x_0 wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0). \quad (13)$$

Obrazowo: funkcja jest ciągła w punkcie, gdy jej wykres nie „przerywa się” w tym punkcie.

Funkcje lewostronnie i prawostronnie ciągłe

Definicja 8 (funkcji lewostronnie ciągłej w punkcie)

Niech $x_0 \in \mathbb{R}$ oraz niech funkcja f będzie określona przynajmniej na przedziale $(x_0 - r, x_0]$ dla pewnego $r > 0$. Funkcja f jest lewostronnie ciągła w punkcie x_0 wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0). \quad (14)$$

Analogicznie definiujemy funkcję prawostronną w punkcie x_0 .

Definicja 9

Przedziałem nazywamy zbiór postaci:

(a, b) , $(a, b]$, $[a, b)$, $[a, b]$, gdzie $a < b$,

lub $(-\infty, a)$, $(-\infty, a]$, (a, ∞) , $[a, \infty)$, $(-\infty, \infty)$, gdzie $a \in \mathbb{R}$.

Uwaga. Przedziałami otwartymi będziemy nazywać zbiory postaci (a, b) , $(-\infty, a)$, (a, ∞) , $(-\infty, \infty)$, $a, b \in \mathbb{R}$.

Funkcje ciągłe na przedziale

Definicja 10

Funkcja jest ciągła na przedziale otwartym I , jeżeli jest ciągła w każdym punkcie tego zbioru.

Mówimy, że funkcja $f(x)$ jest ciągła:

- ▶ na przedziale $[a, \infty)$, jeśli jest ciągła na przedziale otwartym: (a, ∞) i prawostronnie ciągła w punkcie a ;
- ▶ na przedziale $(-\infty, b]$, jeśli jest ciągła na przedziale otwartym: $(-\infty, b)$ i lewostronnie ciągła w punkcie b ;
- ▶ na przedziale $[a, b]$, jeśli jest ciągła na przedziale otwartym: (a, b) , prawostronnie ciągła w punkcie a i lewostronnie ciągła w punkcie b .

Funkcje ciągłe — c.d.

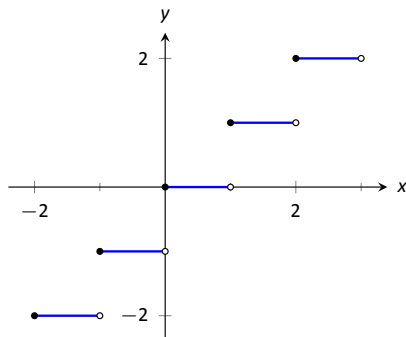
Twierdzenie 7

Funkcja f jest ciągła w punkcie a wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a),$$

tj. wtedy i tylko wtedy, gdy f jest zarówno prawostronnie ciągła jak i lewostronnie ciągła w a .

Przykład



Rysunek: Wykres funkcji $f(x) = [x]$

$[x]$ — część całkowita („podłoga”) x : największa liczba całkowita nie większa niż x ;
 f jest ciągła na $(0, 1)$; jest prawostronnie ciągła w $x_0 = 1, \dots$

Przykłady

- ▶ Funkcja f określona przez: $f(x) = \frac{x}{|x|}$ dla $x \neq 0$, $f(0) = 0$, nie jest ciągła prawostronnie ani lewostronnie w $x_0 = 0$ (nie jest tym bardziej ciągła w $x_0 = 0$).
- ▶ Funkcja g określona przez: $g(x) = \frac{x}{|x|}$ dla $x \neq 0$, $g(0) = 1$ jest ciągła prawostronnie w $x_0 = 0$.

Działania na funkcjach ciągłych

Twierdzenie 8

Jeżeli funkcje f i g są ciągłe w punkcie x_0 , to:

- ▶ *funkcja $f + g$ jest ciągła w punkcie x_0 ;*
- ▶ *funkcja $f - g$ jest ciągła w punkcie x_0 ;*
- ▶ *funkcja $f \cdot g$ jest ciągła w punkcie x_0 ;*
- ▶ *funkcja $\frac{f}{g}$ jest ciągła w punkcie x_0 , o ile $g(x_0) \neq 0$.*

Twierdzenie to jest również prawdziwe dla funkcji lewostronnie (lub prawostronnie) ciągłych.

Twierdzenie 9

Jeżeli

- 1. funkcja f jest ciągła w punkcie x_0 ,*
 - 2. funkcja g jest ciągła w punkcie $y_0 = f(x_0)$*
- to funkcja $g \circ f$ jest ciągła w punkcie x_0 ;
przypominamy, że $(g \circ f)(x_0) = g(f(x_0))$.*

Z twierdzeń 8 i 9 wynika, że wiele funkcji występujących w zastosowaniach praktycznych to funkcje ciągłe (funkcje: wielomianowa, sinus, cosinus, wykładnicza i logarytmiczna itd. są funkcjami ciągłymi). Można pokazać, że wszystkie funkcje elementarne są ciągłe.

Twierdzenia o funkcjach ciągłych

Twierdzenie 10 (Bolzano)

Jeżeli funkcja f , ciągła na przedziale $[a, b]$, spełnia warunek $f(a)f(b) < 0$, to istnieje $c \in (a, b)$ taki, że $f(c) = 0$.

Miejsce zerowe funkcji spełniającej założenia twierdzenia może być wyznaczone np. przy użyciu metody bisekcji (równego podziału) — por. artykuł „Metoda równego podziału w Wikipedii”.

Twierdzenie 11

Jeżeli funkcja f jest ciągła na przedziale skończonym $[a, b]$, to:

- 1. jest ograniczona na tym przedziale;*
- 2. istnieją punkty c i d należące do $[a, b]$ takie, że*

$$f(c) = \inf_{x \in [a, b]} f(x) \quad \text{ i } \quad f(d) = \sup_{x \in [a, b]} f(x).$$

Niewłaściwa granica funkcji w punkcie I

Definicja 11

Niech $x_0 \in \mathbb{R}$ oraz niech funkcja f będzie funkcją określoną przynajmniej na sąsiedztwie $S(x_0, r)$ dla pewnego $r > 0$.

Funkcja f ma w punkcie x_0 granicę niewłaściwą ∞ , co oznaczamy przez

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty,$$

jeżeli dla każdego $N > 0$ istnieje $\delta > 0$ takie, że dla każdego $x \in S(x_0, r)$:

$$\text{Jeżeli } |x - x_0| < \delta \text{ to } f(x) > N.$$

Niewłaściwa granica funkcji w punkcie II

Definicja 12

Niech $x_0 \in \mathbb{R}$ oraz niech funkcja f będzie funkcją określoną przynajmniej na sąsiedztwie $S(x_0, r)$ dla pewnego $r > 0$. Funkcja f ma w punkcie x_0 granicę niewłaściwą $-\infty$, co oznaczamy przez

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty,$$

jeżeli dla każdego $N < 0$ istnieje $\delta > 0$ takie, że dla każdego $x \in S(x_0, r)$:

$$\text{Jeżeli } |x - x_0| < \delta \text{ to } f(x) < N.$$

Przykład 1

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = \infty.$$

Jednostronne granice niewłaściwe w punkcie

Definicje jednostronnych granic niewłaściwych w punkcie — analogiczne do odpowiednich definicji granic w punkcie. Fakt, że funkcja f punkcie a granicę lewostronną $-\infty$ zapisujemy w postaci:

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty;$$

fakt, że funkcja f punkcie a granicę prawostronną $-\infty$ zapisujemy w postaci:

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty;$$

fakt, że funkcja f punkcie a granicę lewostronną ∞ zapisujemy w postaci:

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \infty;$$

fakt, że funkcja f punkcie a granicę prawostronną ∞ zapisujemy w postaci:

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \infty.$$

Asymptoty pionowe

Definicja 13

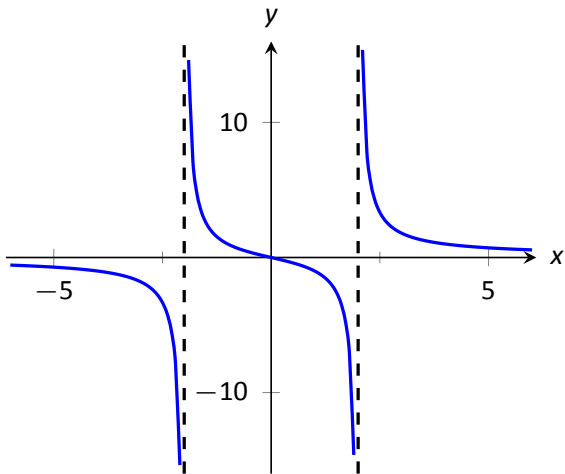
Prosta $x = a$ jest asymptotą pionową lewostronną funkcji f , jeżeli

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty \text{ albo } \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \infty.$$

Asymptotę pionową prawostronną definiujemy analogicznie.

Przykład 2

Prosta $x = 0$ jest asymptotą pionową lewostronną i prawostronną funkcji $f(x) = \frac{1}{x}$ (czyli jest tzw. asymptotą obustronną funkcji f).



Rysunek: Wykres funkcji $f(x) = \frac{3x}{x^2-4}$

Proste $x = -2$ i $x = 2$: asymptoty pionowe obustronne funkcji f ;

Granice w nieskończoności I

Definicja 14

Niech funkcja f będzie określona na przedziale (a, ∞) dla pewnego $a \in \mathbb{R}$. Powiemy, że f ma granicę w nieskończoności równą g , co będziemy zapisywać

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = g,$$

jeżeli dla każdego $\epsilon > 0$ istnieje $M > a$ takie, że:

$$\text{Jeżeli } x > M, \quad \text{to } |f(x) - g| < \epsilon.$$

Granice w nieskończoności II

Definicja 15

Niech funkcja f będzie określona na przedziale $(-\infty, b)$ dla pewnego $b \in \mathbb{R}$. Powiemy, że f ma granicę w minus nieskończoności równą g , co będziemy zapisywać

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = g,$$

jeżeli dla każdego $\epsilon > 0$ istnieje $M < b$ takie, że:

$$\text{Jeżeli } x < M, \quad \text{to } |f(x) - g| < \epsilon.$$

Granice w nieskończoności III

Definicja 16

Niech funkcja f będzie określona na przedziale (a, ∞) dla pewnego $a \in \mathbb{R}$. Powiemy, że f ma w nieskończoności granicę niewłaściwą ∞ , co będziemy zapisywać

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty,$$

jeżeli dla każdego $M > 0$ istnieje $N > a$ takie, że:

$$\text{Jeżeli } x > N, \text{ to } f(x) > M.$$

W analogiczny sposób definiujemy granicę niewłaściwą $-\infty$ w nieskończoności oraz granice niewłaściwe w minus nieskończoności.

Asymptota pozioma

Definicja 17 (asymptoty poziomej funkcji)

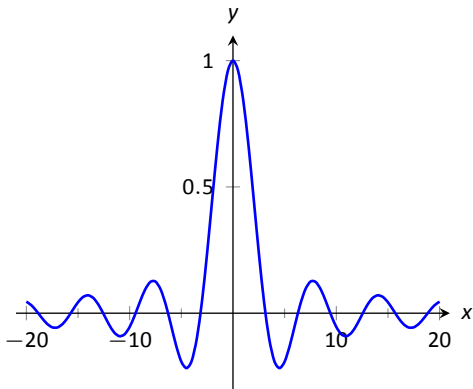
Prosta $y = b$ nazywamy asymptotą poziomą funkcji f w ∞ wtedy i tylko wtedy, gdy:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - b) = 0.$$

Analogicznie definiujemy asymptotę poziomą w $-\infty$.

Przykład. Prosta $y = 0$ jest asymptotą poziomą funkcji wykładniczej $f(x) = \frac{1}{x^2}$ w $+\infty$ bo:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{x^2} - 0 \right) = 0.$$



Rysunek: Wykres funkcji f

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x \neq 0; \\ 1, & x = 0. \end{cases}$$

Prosta $y = 0$ jest asymptotą poziomą funkcji f w $-\infty$ i ∞ .

Asymptota ukośna

Definicja 18

Mówimy, że prosta $y = ax + b$ jest asymptotą ukośną funkcji f w ∞ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$a = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} \text{ oraz } b = \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - ax].$$

Uwaga: asymptota pozioma jest szczególnym przypadkiem asymptoty ukośnej.

Przykład 3

Prosta $y = x$ jest asymptotą ukośną funkcji $f(x) = \frac{x^2+1}{x}$ w ∞ .

Definicje Heinego granic jednostronnych, granic niewłaściwych i granic w nieskończoności

Definicje Heinego dla rozważanych granic: por. książkę Gewerta i Skoczylasa „Analiza matematyczna 1”, wyd. 27, rozdz. 3.