Pochodna funkcji: definicja, podstawowe własności

dr Mariusz Grządziel

Katedra Matematyki, Uniwersytet Przyrodniczy we Wrocławiu

r. akad. 2022/2023

Problem — obliczanie prędkości chwilowej

Droga s, jaką przemierzy kulka ołowiana upuszczona z wysokiej wieży po czasie t:

$$s = \frac{gt^2}{2}.$$

Przyjmujemy: $g = 10 \frac{m}{s^2}$.
Chcemy znaleźć prędkość kulki w danym momencie, np. dla $t_0 = 2$.

Średnia prędkość kulki na przedziale czasowym $[t_0, t_0 + \Delta t]$:

$$\frac{s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)}{\Delta t} = 5(2t_0 + \Delta t).$$

Definicja 1

Niech $x_0 \in \mathbb{R}$ oraz niech funkcja f będzie określona przynajmniej na otoczeniu $O(x_0, r)$, gdzie $r > 0$. Ilorazem różnicowym funkcji f w punkcie x_0 odpowiadającym przyrostowi Δx, gdzie $0 < |\Delta x| < r$, zmiennej niezależnej nazywamy liczbę

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Pochodna funkcji

Definicja 2

Niech $x_0 \in \mathbb{R}$ oraz niech funkcja f będzie określona przynajmniej na otoczeniu $O(x_0)$. Pochodną właściwą funkcji f w punkcie x_0 nazywamy granicę właściwą

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Uwaga. Inaczej mówiąc pochodna funkcji f jest granicą ilorazu różnicowego $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ gdy $\Delta x \to 0$. Mamy zatem

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Oznaczenia

Do oznaczania pochodnej funkcji f w punkcie x_0 stosowane są także symbole

$$\frac{df}{dx}(x_0), \ Df(x_0).$$

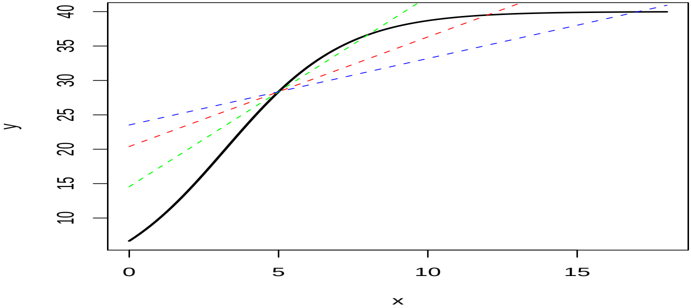
Mamy

$$s'(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} 5(2t_0 + \Delta t) = 10t_0.$$

Interpretacja geometryczna ilorazu różnicowego

Iloraz różnicowy jest równa współczynnikowi kierunkowemu prostej przechodzącej przez punkty $(x_0, f(x_0))$ i $(x_0 + \Delta x, f(x_0 + \Delta x))$ (tzw. siecznej).
Uwaga „Współczynnik kierunkowy siecznej” jest równy tangensowi kąta nachylenia siecznej do dodatniej części osi OX.

Interpretacja geometryczna ilorazu różnicowego— c.d.



Rysunek: Sieczne przykładowej funkcji f_0 dla $x_0 = 5$ i różnych wartości przyrostu Δx

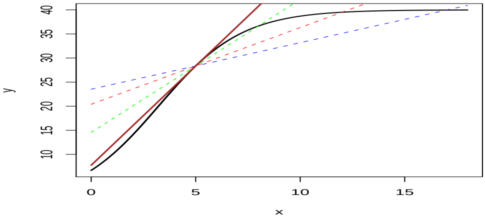
Interpretacja geometryczna pochodnej

Definicja 3 (stycznej do wykresu funkcji)

Niech $x_0 \in \mathbb{R}$ *oraz niech funkcja ciągła* f *będzie określona przynajmniej na otoczeniu* x_0*. Prosta jest styczna do wykresu funkcji* f *w punkcie* $(x_0, f(x_0))$*, jeżeli jest granicznym położeniem siecznych funkcji* f *przechodzących przez punkty* $(x_0, f(x_0))$, $(x, f(x))$*, gdy* $x \to x_0$*.*

Geometrycznie styczna jest prostą, która w sąsiedztwie punktu styczności „najlepiej” przybliża wykres funkcji. Nie jest prawdą, że każda prosta która ma tylko jeden punkt wspólny z wykresem jest do niego styczna.

Interpretacja geometryczna pochodnej- c.d.



Rysunek: Styczna jako graniczne położenie siecznych

Twierdzenie 1

Równanie stycznej do wykresu funkcji f w punkcie $(x_0, f(x_0))$ ma postać

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0);$$

zakładamy, że pochodną funkcji f w punkcie x_0 istnieje.

Uwaga terminologiczna Jeżeli funkcja f ma pochodną w punkcie x_0, to będziemy mówić, że jest ona w tym punkcie różniczkowalna.

Można sprawdzić, że:

- dla funkcji stałej $f(x) = c$, $c \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 0$;
- dla funkcji liniowej $f(x) = ax + b$, $a, b \in \mathbb{R}$ $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = a$;
- dla funkcji potęgowej $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$ $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = nx^{n-1}$;
- dla $f(x) = \frac{1}{x^m}$, $m \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$
$$f'(x) = \frac{-m}{x^{m+1}};$$
- dla $f(x) = \sin x$, $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \cos x$;
- dla $f(x) = \cos x$, $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = -\sin x$;
- dla $f(x) = e^x$, $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = e^x$,

por. rozdział „Pochodna funkcji” skryptu M. Krycha (odpowiedni link jest umieszczony na stronie kursu).

Przykład

Styczna do wykresu funkcji $f(x) = e^x$ w punkcie $(0, 1)$ ma równanie

$$y = x + 1.$$

Różniczkowalność funkcji $f(x) = |x|$

Dla funkcji $f(x) = |x|$ pochodna w $x_0 = 0$ nie istnieje. Wynika to z równości:

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{|x| - 0}{x - 0} = -1;$$
$$\lim_{x \to 0^+} \frac{|x| - 0}{x - 0} = 1.$$

W punkcie $x_0 \neq 0$ funkcja f jest różniczkowalna: $f'(x) = -1$ dla $x < 0$, $f'(x) = 1$ dla $x > 0$.

Pochodne jednostronne funkcji

Definicja 4

Niech $x_0 \in \mathbb{R}$ *oraz niech funkcja* f *będzie określona przynajmniej na przedziale* $(x_0 - r, x_0)$ *dla pewnego* $r > 0$*. Pochodną lewostronną funkcji* f *w punkcie* x_0 *nazywamy granicę właściwą lewostronną*

$$f'_-(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Definicja 5

Niech $x_0 \in \mathbb{R}$ *oraz niech funkcja* f *będzie określona przynajmniej na przedziale* $(x_0, x_0 + r)$ *dla pewnego* $r > 0$*. Pochodną prawostronną funkcji* f *w punkcie* x_0 *nazywamy granicę właściwą prawostronną*

$$f'_+(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Funkcja $f(x) = |x|$ — pochodne jednostronne w $x_0 = 0$.

Można sprawdzić, że

$$f'_-(0) = -1, \quad f'_+(0) = 1.$$

Warunek konieczny i dostateczny istnienia pochodnej

Fakt 1

Funkcja f ma pochodną w punkcie x_0 wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją pochodne jednostronne w tym punkcie i są sobie równe, tj.

$$f'_-(x_0) = f'_+(x_0).$$

Gdy warunek ten jest spełniony, to pochodna funkcji f jest równa wspólnej wartości pochodnych jednostronnych:

$$f'(x_0) = f'_-(x_0) = f'_+(x_0).$$

Różniczkowalność a ciągłość funkcji w punkcie

Twierdzenie 2

Jeżeli funkcja f jest różniczkowalna w punkcie x_0, to jest w tym punkcie ciągła.

Przykład

Wyznaczyć parametry a i b, dla których funkcja f określona wzorem

$$f(x) = \begin{cases} a(x-1)+b, & x < 1, \\ \frac{1}{x}, & x \geqslant 1; \end{cases}$$

jest różniczkowalna na $\mathbb{R}$.

Rozwiązanie Funkcja f jest różniczkowalna na $(-\infty, 1)$ i na $(1, \infty)$. Funkcja ta będzie różniczkowalna na $\mathbb{R}$, jeżeli w punkcie $x_0 = 1$ będzie obustronnie ciągła i gdy pochodne jednostronne w tym punkcie będą równe.

Funkcja f jest ciągła w $x_0 = 1$ wtedy i tylko wtedy, gdy $b = 1$.

Przy tym założeniu:

$$f'_-(1) = a \quad \text{i} \quad f'_+(1) = -1.$$

Stąd otrzymujemy: $a = -1$.

Odpowiedź $a = -1, b = 1$.

Przykład

Wyznaczyć parametry a i b, dla których funkcja f określona wzorem

$$f(x) = \begin{cases} ax + b, & x < 2, \\ \frac{1}{x^2}, & x \geqslant 2; \end{cases}$$

jest różniczkowalna na $\mathbb{R}$.

Rozwiązanie Funkcja f jest różniczkowalna na $(-\infty, 2)$ i na $(2, \infty)$. Funkcja ta będzie różniczkowalna na $\mathbb{R}$, jeżeli w punkcie x_0 będzie obustronnie ciągła i gdy pochodne jednostronne w tym punkcie będą równe.

Funkcja f jest ciągła w $x_0 = 2$ wtedy i tylko wtedy, gdy $2a + b = 1/4$. Przy tym założeniu:

$$f'_{-}(2) = a \quad \text{i} \quad f'_{+}(2) = \frac{-2}{8} = \frac{-1}{4}.$$

Stąd otrzymujemy: $a = -1/4, b = 3/4$.

Pochodna na przedziale

Definicja 6 (pochodnej funkcji na przedziale otwartym)

Funkcja ma pochodną właściwą na przedziale otwartym wtedy i tylko wtedy, gdy ma pochodną właściwą w każdym punkcie tego zbioru. Funkcję określoną na tym przedziale, której wartości w punktach x tego zbioru są równe $f'(x)$ nazywamy pochodną funkcji na zbiorze i oznaczamy przez f'.

Pochodną funkcji f na przedziale $\mathcal{I} = [a, b]$ (oznaczmy ją przez f') określamy następująco:

$$f'(x) = \begin{cases} f'(x), & x \in (a, b), \\ \text{pochodna prawostronna w } x, & x = a, \\ \text{pochodna lewostronna w } x, & x = b. \end{cases}$$

Analogicznie definiujemy pochodną na innych typach przedziałów.
Powiemy, że funkcja jest różniczkowalna na przedziale I, jeżeli ma ona pochodną na tym przedziale.

Twierdzenia o pochodnych funkcji

Twierdzenie 3

(o pochodnej sumy, różnicy, iloczynu oraz ilorazu funkcji).
Jeżeli funkcje f i g mają pochodne właściwe w punkcie x_0, to

$$\begin{aligned}
(f+g)'(x_0) &= f'(x_0)+g'(x_0); && (1)\\
(f-g)'(x_0) &= f'(x_0)-g'(x_0)\ ; && (2)\\
(cf)'(x_0) &= cf'(x_0),\ \text{gdzie } c\in\mathbb{R}; && (3)\\
(f\cdot g)'(x_0) &= f'(x_0)g(x_0)+f(x_0)g'(x_0); && (4)\\
\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) &= \frac{f'(x_0)g(x_0)-f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)},\ \text{o ile } g(x_0)\neq 0 && (5)
\end{aligned}$$

Dowód ostatniej równości wynika z faktu:

$$\frac{\frac{f(x)}{g(x)}-\frac{f(x_0)}{g(x_0)}}{x-x_0}=\frac{f(x)g(x_0)-f(x_0)g(x)}{(x-x_0)g(x)g(x_0)}=\frac{\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}g(x)-\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}f(x)}{g(x)g(x_0)}$$

Pochodna funkcji odwrotnej

Twierdzenie 4

Załóżmy, że funkcja f *jest ciągła i ściśle monotoniczna na przedziale* $(x_0 - r, x_0 + r)$ *oraz że ma pochodną różną od zera w punkcie* x_0*. Wtedy funkcja odwrotna do* f *ma pochodną w punkcie* $y_0 = f(x_0)$ *oraz*

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Przykład 1

Funkcja ln*, odwrotna do funkcji eksponencjalnej, spełnia dla dowolnego* $y_0 > 0$ *równość*

$$\ln'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{y_0},$$

gdzie $f(x) = exp(x)$ *jest funkcją eksponencjalną. Stąd otrzymujemy:*

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}, \quad x > 0.$$

Pochodna funkcji złożonej

Twierdzenie 5

Jeżeli funkcja f ma pochodną właściwą w punkcie x_0 i funkcja g ma pochodną właściwą w punkcie $f(x_0)$,
to

$$\Big((g(f(x_0))\Big)' = g'(f(x_0))f'(x_0).$$

Dowód, przy założeniu, że $f(x) - f(x_0) \neq 0$ dla $x \in S(x_0, r)$ dla pewnego $r > 0$, można oprzeć na równości:

$$\frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} = \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{f(x) - f(x_0)} \cdot \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Przykłady

$$(e^{-x^2})' = (e^{-x^2})(-2x) = -2e^{-x^2}x$$

$$(a^x)' = (e^{bx})' = be^{bx} = a^x \ln a,$$

gdzie $1 \neq a > 0$, $b = \ln a$.

Pochodna funkcji złożonej — przykład

$$(x^b)' = (e^{b \ln x})' = bx^{b-1},$$

gdzie b jest dowolną liczbą rzeczywistą różną od 0, x należy do dziedziny naturalnej funkcji $f(x) = x^b$ oraz do dziedziny naturalnej funkcji $f(x) = x^{b-1}$.

Pochodne ważniejszych funkcji elementarnych

Wzór	Zakres zmienności
$(c)' = 0$	$c \in \mathbb{R}$
$(x^n)' = nx^{n-1}$	$n \in \mathbb{N}$ oraz $x \in \mathbb{R}$
$(x^p)' = px^{p-1}$	$p \in \{-1, -2, -3, ...\}$ oraz $x \neq 0$
$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$	$\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, Zakres zmiennej x zależy α
$(\sin x)' = \cos x$	$x \in \mathbb{R}$
$(\cos x)' = -\sin x$	$x \in \mathbb{R}$
$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$	$0 < a \neq 1$ oraz $x > 0$
$(\ln x)' = \frac{1}{x}$	$x > 0$
$(a^x)' = a^x \ln a$	$0 < a \neq 1$ oraz $x \in \mathbb{R}$
$(e^x)' = e^x$	$x \in \mathbb{R}$
$(\operatorname{arc\,tg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$	$x \in \mathbb{R}$
$(\operatorname{arc\,ctg} x)' = \frac{-1}{1+x^2}$	$x \in \mathbb{R}$
$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$x \in (-1, 1)$
$(\arccos x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$x \in (-1, 1)$

Pochodne wyższych rzędów

Pochodną funkcji f' na $\mathcal{I}$ (jeżeli ona istnieje) będziemy oznaczać przez $f^{(2)}$,
pochodną funkcji $f^{(2)}$ na $\mathcal{I}$ (jeżeli ona istnieje) przez $f^{(3)}$,
pochodną funkcji $f^{(3)}$ na $\mathcal{I}$ (jeżeli ona istnieje) przez $f^{(4)}$ itd.
Zamiast $f^{(2)}$ piszemy na ogół f''.
Niektórzy autorzy piszą f''' zamiast $f^{(3)}$.

Powiemy, że funkcja f jest dwukrotnie różniczkowalna na przedziale $\mathcal{I}$, jeżeli istnieje druga pochodna tej funkcji na przedziale $\mathcal{I}$.

Analogicznie definiujemy pojęcie funkcji n- krotnie różniczkowalnej, gdzie n jest dowolną liczbą naturalną.
W pewnych sytuacjach określenie n-tej pochodnej wymaga zawężenia dziedziny — na przykład w przypadku funkcji $f(x) = \sqrt{x}, x \geqslant 0$ pochodne 1-go., 2-go itd. rzędu należy określić na $(0, \infty)$.

Pochodne wyższych rzędów— przykłady

Dla $f(x) = x^3$ (w tym przypadku obliczamy pochodne na przedziale $\mathcal{I} = \mathbb{R}$) mamy:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2, \\ f''(x) &= 6x, \\ f'''(x) &= 6, \\ f^{(n)}(x) &= 0 \text{ dla } n > 3. \end{aligned}$$