

Zastosowania pochodnej

dr Mariusz Grządziel

Katedra Matematyki, Uniwersytet Przyrodniczy we Wrocławiu

semestr zimowy, rok akademicki 2022/2023

Monotoniczność funkcji na przedziale

Założmy, że funkcja f jest różniczkowalna na przedziale \mathcal{I} (tzn. istnieje pochodna funkcji f na przedziale \mathcal{I}). Funkcja f jest:

- ▶ rosnąca, jeśli $f'(x) > 0$ na przedziale \mathcal{I} ;
- ▶ niemalejąca, jeśli $f'(x) \geq 0$ na przedziale \mathcal{I} ;
- ▶ malejąca, jeśli $f'(x) < 0$ na przedziale \mathcal{I} ;
- ▶ nierosnąca, jeśli $f'(x) \leq 0$ na przedziale \mathcal{I} .

Przykład 1

Funkcja $f(x) = ax^2 + bx + c$ dla $a > 0$ jest malejąca na przedziale $(-\infty, -\frac{b}{2a})$ i rosnąca na przedziale $(-\frac{b}{2a}, \infty)$.

Monotoniczność funkcji logistycznej

Pochodna funkcji logistycznej

$$f(t) = \frac{a}{1 + be^{-ct}}, \quad a, b, c > 0,$$

ma postać

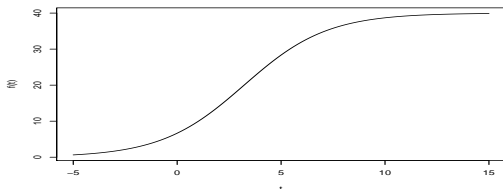
$$f'(t) = \frac{abce^{-ct}}{(1 + be^{-ct})^2}.$$

Stąd wynika, że f jest monotoniczna na \mathbb{R} .

Monotoniczność f można też uzasadnić, opierając się na własnościach funkcji wykładniczej— wynika z nich, że mianownik f jest funkcją malejącą zmiennej x .

Funkcja logistyczna

Rozważamy funkcję logistyczną $y = f_0(t) = \frac{40}{1+5e^{-0,5t}}$



Rysunek: Wykres funkcji $y = f_0(t) = \frac{40}{1+5e^{-0,5t}}$

Funkcja f_0 może opisywać np. wzrost masy stu ziaren kukurydzy (jednostką pomiaru byłby gram) ; t oznaczałoby czas wegetacji wyrażony w tygodniach.

Ekstremum lokalne

Definicja 1

Mówimy, że funkcja $f(x)$ osiąga w punkcie x_0

- ▶ *minimum lokalne*, jeżeli wartość funkcji f w punkcie x_0 jest mniejsza od wartości funkcji f w pewnym sąsiedztwie tego punktu, tj.

$$f(x) > f(x_0) \quad \text{dla } x \in S(x_0, r)$$

dla pewnego $r > 0$.

- ▶ *maksimum lokalne*, jeżeli wartość funkcji f w punkcie x_0 jest większa od wartości funkcji f w pewnym sąsiedztwie tego punktu, tj.

$$f(x) < f(x_0) \quad \text{dla } x \in S(x_0, r)$$

dla pewnego $r > 0$.

ekstremum lokalne: minimum lokalne lub maksimum lokalne.

Ekstremum lokalne— warunek wystarczający

Twierdzenie 1

Jeśli pochodna funkcji f w punkcie x_0 jest równa zero i dla pewnego $r > 0$

- ▶ spełnione są nierówności

$$f'(x) < 0 \text{ dla } x \in (x_0 - r, x_0), \quad (1)$$

$$f'(x) > 0 \text{ dla } x \in (x_0, x_0 + r), \quad (2)$$

to funkcja w x_0 osiąga minimum lokalne.

- ▶ spełnione są nierówności

$$f'(x) > 0 \text{ dla } x \in (x_0 - r, x_0), \quad (3)$$

$$f'(x) < 0 \text{ dla } x \in (x_0, x_0 + r), \quad (4)$$

to funkcja w x_0 osiąga maksimum lokalne.

Punkt, w którym pochodna funkcji jest równa zero będziemy nazywać punktem krytycznym tej funkcji.

Twierdzenie 2

Jeżeli funkcja f ma ekstremum lokalne w punkcie x_0 i jest w tym punkcie różniczkowalna, to x_0 jest punktem krytycznym funkcji f .

Przykład 2

Funkcja $f(x) = ax^2 + bx + c$ dla $a > 0$ ma minimum lokalne w punkcie $x_0 = \frac{-b}{2a}$. Funkcja ta ma w tym punkcie minimum globalne (na zbiorze liczb rzeczywistych \mathbb{R}):

$$f(x_0) \leq f(x) \quad \text{dla} \quad x \in \mathbb{R}$$

Definicja 2

Funkcja f o wartościach w zbiorze \mathbb{R} ma w punkcie x_0 swojej dziedziny:

- ▶ *maksimum globalne, jeżeli dla każdego x należącego do jej dziedziny $f(x) \leq f(x_0)$;*
- ▶ *minimum globalne, jeżeli dla każdego x należącego do jej dziedziny $f(x) \geq f(x_0)$.*

Ekstremum lokalne— przykład

Rozważmy funkcję

$$g(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 6x.$$

Oczywiście g jest różniczkowalna na \mathbb{R} . Chcąc zbadać istnienie ekstremów funkcji g znajdujemy miejsca zerowe $g'(x)$:

$$g'(x) = x^2 - 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = 2 \text{ lub } x = 3.$$

Mamy:

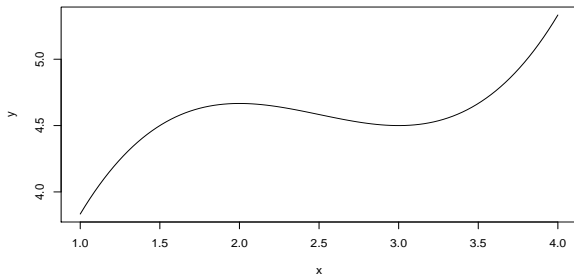
$$g'(x) > 0 \text{ dla } x < 2 \text{ lub } x > 3; \tag{5}$$

$$g'(x) < 0 \text{ dla } x > 2 \text{ i } x < 3. \tag{6}$$

(7)

Stąd funkcja g ma w punkcie $x = 2$ maksimum lokalne, i w punkcie $x = 3$ minimum lokalne.

Przykład—c.d.



Rysunek: Wykres funkcji $y = f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 6x$

Pochodna niewłaściwa

Założmy, że funkcja f jest ciągła w punkcie $x_0 \in \mathbb{R}$. Powiemy, że funkcja f ma w punkcie x_0 pochodną niewłaściwą, jeżeli granica

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

jest niewłaściwa. Fakt, że:

- ▶ funkcja ma w x_0 pochodną niewłaściwą ∞ zapisujemy:
 $f'(x_0) = \infty$;
- ▶ funkcja ma w x_0 pochodną niewłaściwą $-\infty$ zapisujemy:
 $f'(x_0) = -\infty$.

W podobny sposób definiujemy pochodne niewłaściwe jednostronne.

Przykład 3

Dla funkcji $f(x) = x^{1/3}$ mamy

$$\frac{f(0 + \Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \frac{1}{(\Delta x)^{2/3}} \xrightarrow{\Delta x \rightarrow 0} \infty.$$

Poszukiwanie wartości najmniejszej i największej na przedziale domkniętym: algorytm

Założmy, że funkcja f określona na przedziale $[a, b]$:

- ▶ jest ciągła na $[a, b]$;
- ▶ ma pochodną właściwą lub niewłaściwą poza skończoną liczbą punktów przedziału $[a, b]$;
- ▶ ma skończoną liczbę punktów krytycznych

Wartości: najmniejszą i największą funkcji f na tym przedziale można obliczyć:

- ▶ wyznaczając punkty u_1, u_2, \dots, u_m należące do (a, b) , w których pochodna f jest niewłaściwa lub nie istnieje;
- ▶ wyznaczając punkty krytyczne v_1, v_2, \dots, v_n funkcji f należące do przedziału (a, b) ;
- ▶ wybierając spośród liczb:

$$f(u_1), f(u_2), \dots, f(u_m), f(v_1), f(v_2), \dots, f(v_n), f(a), f(b)$$

liczbę najmniejszą i największą.

Poszukiwanie wartości najmniejszej i największej na przedziale domkniętym: przykład

1. Funkcja g określona jest wzorem

$$g(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 6x.$$

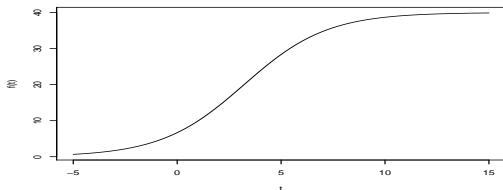
Chcemy wyznaczyć wartości: najmniejszą i największą funkcji g na przedziale $[0, 4]$. W tym celu wyznaczamy wartości

$$g(0) = 0, g(2) = 4\frac{2}{3}, g(3) = 4\frac{1}{2}, g(4) = 5\frac{1}{3}.$$

Wartości najmniejsza i największa funkcji g na odcinku $[0, 4]$ to, odpowiednio: 0 i $5\frac{1}{3}$.

Funkcja logistyczna

Rozważamy funkcję logistyczną $y = f_0(t) = \frac{40}{1+5e^{-0,5t}}$



Rysunek: Wykres funkcji $y = f_0(t) = \frac{40}{1+5e^{-0,5t}}$

Chcemy znaleźć punkt, w którym tempo wzrostu funkcji f „przestaje rosnąć”.

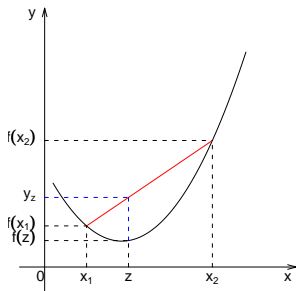
Pojęcie funkcji wypukłej

Tempo wzrostu funkcji $f_0(t) = \frac{40}{1+5e^{-0,5t}}$ rośnie na $[0, t_0)$, gdzie $t_0 = \frac{\ln 5}{0,5} \approx 3,22$.

Odpowiada to ścisłej wypukłości funkcji f_0 na przedziale $[0, t_0)$.

Definicja 3

Mówimy, że funkcja f jest ściśle wypukła na przedziale \mathcal{I} , jeżeli dla $x_1, x_2 \in \mathcal{I}$, $x_1 < x_2$, odcinek łączący punkty $(x_1, f(x_1))$ i $(x_2, f(x_2))$ leży w całości (z wyjątkiem końców) ponad wykresem funkcji f .



Rysunek: Funkcja f jest ściśle wypukła na przedziale \mathcal{I} jeżeli dla dowolnych $x_1, x_2 \in \mathcal{I}$ dla każdego $z \in (x_1, x_2)$ punkt $(z, f(z))$ leży poniżej odcinka łączącego $(x_1, f(x_1))$ i $(x_2, f(x_2))$.

Wypukłość funkcji dwukrotnie różniczkowalnych

Funkcja f jest dwukrotnie różniczkowalna na przedziale otwartym \mathcal{I} jeżeli dla każdego $x_0 \in \mathcal{I}$ istnieje druga pochodna funkcji f w x_0 .

Twierdzenie 3

Funkcja f dwukrotnie różniczkowalna na \mathcal{I} jest ściśle wypukła na przedziale otwartym \mathcal{I} wtedy i tylko wtedy, gdy $f''(x_0) > 0$ dla każdego $x_0 \in \mathcal{I}$.

Dla funkcji logistycznej $f(t) = \frac{a}{1+be^{-ct}}$, $a, b, c > 0$, druga pochodna

$$f''(t) = \frac{abc^2 e^{-ct} (be^{-ct} - 1)}{(1 + be^{-ct})^3}$$

jest dodatnia dla $t < t_0 = \frac{\ln b}{c}$; gdy $b = 5$, $c = 0,5$ (odpowiadają funkcji f_0) $t_0 \approx 3,22$.

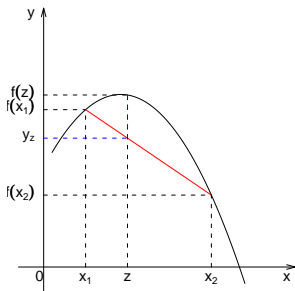
Pojęcie funkcji ściśle wklęsłej

Tempo wzrostu funkcji $f_0(t) = \frac{40}{1+5e^{-0,5t}}$ maleje na (t_0, ∞) , gdzie $t_0 = \frac{\ln 5}{0,5} \approx 3,22$.

Odpowiada to ścisłej wklęsłości funkcji f_0 na przedziale (t_0, ∞) .

Definicja 4

Mówimy, że funkcja f jest ściśle wklęsła na przedziale \mathcal{I} , jeżeli dla $x_1, x_2 \in \mathcal{I}$, $x_1 < x_2$, odcinek łączący punkty $(x_1, f(x_1))$ i $(x_2, f(x_2))$ leży w całości (z wyjątkiem końców) pod wykresem funkcji f .



Rysunek: Funkcja f jest ściśle wklęsła na przedziale \mathcal{I} jeżeli dla dowolnych $x_1, x_2 \in \mathcal{I}$ dla każdego $z \in (x_1, x_2)$ punkt $(z, f(z))$ leży powyżej odcinka łączącego $(x_1, f(x_1))$ i $(x_2, f(x_2))$.

Ścisła wklęsłość funkcji dwukrotnie różniczkowalnych

Twierdzenie 4

Funkcja f dwukrotnie różniczkowalna na przedziale otwartym \mathcal{I} jest ściśle wklęsła na \mathcal{I} wtedy i tylko wtedy, gdy $f''(x_0) < 0$ dla każdego $x_0 \in \mathcal{I}$.

Dla funkcji logistycznej $f(t) = \frac{a}{1+be^{-ct}}$, $a, b, c > 0$, druga pochodna

$$f''(t) = \frac{abc^2 e^{-ct} (be^{-ct} - 1)}{(1 + be^{-ct})^3}$$

jest ujemna dla $t > t_0 = \frac{\ln b}{c}$; gdy $b = 5$, $c = 0,5$ (odpowiadają funkcji f_0) $t_0 \approx 3,22$.

Funkcje wypukłe na przedziałach domkniętych z jednej lub obu stron

Jeżeli funkcja jest ściśle wypukła (ściśle wklęsła) na przedziale otwartym \mathcal{I} jest również ściśle wypukła (ściśle wklęsła) na przedziale $I_1 \subset \mathcal{I}$, który niekoniecznie jest otwarty.

Podobne stwierdzenie: prawdziwe dla funkcji wypukłych i funkcji wklęsłych.

Punkt przegięcia

Definicja 5

Niech funkcja f będzie różniczkowalna na otoczeniu punktu $O(x_0, r) = (x_0 - r, x_0 + r)$ dla pewnego $r > 0$. Mówimy, że punkt $(x_0, f(x_0))$ jest punktem przegięcia wykresu f jeśli funkcja f jest:

- ▶ ściśle wypukła na $(x_0 - t, x_0)$ i ściśle wklęsła na $(x_0, x_0 + t)$
- ▶ lub ściśle wklęsła na $(x_0 - t, x_0)$ i ściśle wypukła na $(x_0, x_0 + t)$

dla pewnego $t < r$.

Uwaga. W podręczniku Gewerta i Skoczylasa założenie o różniczkowalności funkcji f zastąpione jest słabszym założeniem: f jest określona na otoczeniu punktu $O(x_0, r) = (x_0 - r, x_0 + r)$ dla pewnego $r > 0$ i ma w x_0 pochodną: właściwą lub niewłaściwą.

Dla funkcji logistycznej $f(t) = \frac{a}{1+be^{-ct}}$, $t \in \mathbb{R}$, $a, b, c > 0$, punkt $(t_0, f(t_0))$ jest punktem przegięcia wykresu $t_0 = \frac{\ln b}{c}$.

Uzupełnienia

Uwaga 1

Definicję wypukłości funkcji otrzymujemy zastępując w definicji ścisłej wypukłości słowa „ponad wykresem” przez słowa „ponad wykresem lub ma punkty z nim wspólne”. Podobnie otrzymujemy definicję wklęsłości funkcji modyfikując definicję ścisłej wklęsłości.

Uwaga 2

Założmy, że $x_0 \in (a, b)$. Warunkiem koniecznym na to, aby funkcja f , dwukrotnie różniczkowalna na przedziale (a, b) , miała w punkcie $(x_0, f(x_0))$ punkt przegięcia jest $f''(x_0) = 0$.