1. Korzystając z definicji obliczyć pochodne podanych funkcji we wskazanych punktach:
   (a)
   $$f(x) = x^2, \quad x_0 \in \mathbb{R},$$
   (b)
   $$f(x) = \frac{1}{x}, \quad x_0 \neq 0.$$

2. Wykorzystując wzór na pochodną funkcji $f(x) = \sin x$ (por. wykład „Pochodna funkcji"), wzór na pochodną funkcji złożonej oraz równość
   $$\cos x = \sin(\pi/2 - x), \quad x \in \mathbb{R},$$
   udowodnić, że $(\cos x)' = -\sin x$, gdzie $x \in \mathbb{R}$.

3. Uzasadnić równość
   $$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x \quad \text{dla} \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right), \quad k \in \mathbb{Z}.$$
   Wykorzystując tę równość uzasadnić wzór na pochodną funkcji $\operatorname{arc\,tg}$ podany na wykładzie.

4. Korzystając z reguł różniczkowania obliczyć pochodną funkcji f w punktach, w których ona istnieje i jest skończona (i które należą do dziedziny naturalnej funkcji f) dla:
   (a) $f(x) = 2\operatorname{tg} x$;
   (b) $f(x) = 3x^5 + x^3 + 2x + 7$;
   (c) $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x^3} + \frac{2}{x^2}$;
   (d) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$;
   (e) $f(x) = \frac{1+\sin 2x}{2+\cos 5x}$;
   (f) $f(x) = \ln \operatorname{tg} \frac{x}{4}$;
   (g) $f(x) = \sqrt{3x + \sqrt{2x}}$;
   (h) $f(x) = \sin(\cos 2x)$;
   (i) $f(x) = \operatorname{arc\,tg} \frac{2}{x}$;
   (j) $f(x) = \sin^5 \frac{4^x+1}{7^x+1}$;
   (k) $f(x) = x^{2x}$;
   (l) $f(x) = (\sin x)^{\cos x}$.

5. Zbadać istnienie pochodnej funkcji $f(x) = |\sin^7 x|$ w punkcie $x_0 = 0$.

Mariusz Grządziel