

Wykład 11 (19.05.2008). Przedziały ufności dla średniej

Przykład Cena metra kwadratowego (w tys. zł) z dla 14 losowo wybranych mieszkań w mieście A:

3,75; 3,89; 5,09; 3,77; 3,53; 2,82; 3,16; 2,79; 4,34; 3,61; 4,31; 3,31; 2,50; 3,27.

Podczas ostatniego wykładu weryfikowaliśmy

$$H_0 : \mu = \mu_0 \text{ przeciw } H_1 : \mu \neq \mu_0,$$

gdzie $\mu_0 = 3,8$. Założyliśmy, że dane dotyczące cen metra kw. mieszkań w A są realizacją próby prostej z rozkładu normalnego $N(\mu, \sigma)$.

Obliczenia w środowisku R:

```
> t.test(z, mu=3.8)
```

One Sample t-test

```
data: z
```

```
t = -1.1777, df = 13, p-value = 0.26
```

```
alternative hypothesis: true mean is not equal to 3.8
```

```
95 percent confidence interval:
```

```
3.180491 3.982366
```

```
sample estimates:
```

```
mean of x
```

```
3.581429
```

Chcielibyśmy poznać znaczenie terminu: „95 percent confidence interval”
(95-procentowy przedział ufności)

Testy i przedziały ufności

Założmy, że nie dysponujemy danymi dotyczącymi cen mieszkań w poprzednich kwartałach

Problem: dla jakich μ_0 hipoteza $H_0 : \mu = \mu_0$ (przy hipotezie alternatywnej $H_1 : \mu \neq \mu_0$) nie będzie odrzucona przy poziomie istotności $\alpha = 0,05$.

Odpowiedź: dla

$$\mu_0 \in \left(\bar{x} - t_{1-\alpha/2, n-1} \frac{s}{\sqrt{n}}, \bar{x} + t_{1-\alpha/2, n-1} \frac{s}{\sqrt{n}} \right)$$

Dla naszych konkretnych danych ten przedział będzie równy:

$$(3,18; 3,98).$$

ten przedział— realizacja 95-procentowego przedziału ufności dla μ . (lub krócej— 95-procentowy przedział ufności dla średniej μ .)

Przedział ufności dla średniej rozkładu normalnego — przypadek nieznanego odchylenia standardowego

Niech $X_1, X_2, \dots, X_n$ — próba (prosta) z rozkładu $N(\mu, \sigma)$. Mamy:

$$P\left(\bar{X} - t_{1-\alpha/2, n-1} \frac{S}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{X} + t_{1-\alpha/2, n-1} \frac{S}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \alpha.$$

Przedział $(\bar{X} - t_{1-\alpha/2, n-1} \frac{S}{\sqrt{n}}, \bar{X} + t_{1-\alpha/2, n-1} \frac{S}{\sqrt{n}})$ — przedział ufności dla μ na poziomie ufności $1 - \alpha$.

Końce przedziału ufności — zmienne losowe!

W praktyce- często realizacje przedziałów ufności (dla konkretnych danych)- również są nazywane przedziałami ufności

Przedział ufności dla średniej rozkładu normalnego — przypadek znanego odchylenia standardowego

Niech $X_1, X_2, \dots, X_n$ — próba (prosta) z rozkładu $N(\mu, \sigma)$, σ jest znane.

Przedział $(\bar{X} - z_{1-\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X} + z_{1-\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$ — przedział ufności dla μ na poziomie ufności $1 - \alpha$.

$z_{1-\alpha/2}$ — kwantyl rozkładu normalnego rzędu $1 - \alpha/2$.

Dla realizacji próby: $x_1, x_2, \dots, x_n$ — realizacja tego przedziału ufności:

$$(\bar{x} - z_{1-\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_{1-\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$$

Przedział ufności dla proporcji

W państwie P w roku 2004 proporcja p ludzi żyjących w ubóstwie (poverty rate- w skrócie PR) wynosił 12,7; dane pochodzą z badań sondażowych, przeprowadzonych dla reprezentatywnej i 10000-elementowej próby respondentów (zakładamy, że jest ona realizacją próby prostej z $Bin(1, p)$). Jesteśmy zainteresowani 95-procentowym przedziałem ufności dla p .

Przedział ufności dla proporcji— rozkład częstości $\hat{p}$

Niech Y — liczba żyjących w ubóstwie— spośród n ankietowanych.

Oczywiście $Y \sim \text{Bin}(n, p)$ — gdzie p nieznane;

Korzystając z centralnego twierdzenia granicznego: $\hat{p} = \frac{Y}{n}$ ma w przybliżeniu rozkład normalny $N\left(p, \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right)$.

Innym sensownym przybliżeniem rozkładu częstości $\frac{Y}{n}$ jest

$$N\left(\hat{p}, \sqrt{\frac{\hat{p}(1 - \hat{p})}{n}}\right), \quad \hat{p} \text{ oznacza tu realizację zmiennej } Y/n \quad (1)$$

(por. książkę J. Koronackiego i J. Mielniczuka, Twierdzenie 2.16; str. 149).

Można uznać, że powyższe przybliżenia rozkładu $\hat{p} = \frac{Y}{N}$ są dostatecznie dobre, gdy $np \geq 5$ i $n(1 - p) \geq 5$.

Przedział ufności dla proporcji

Z równości (1) wynika, że

$$P\left(-z_{1-\alpha/2} \leq \frac{\hat{p} - p}{\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}} \leq z_{1-\alpha/2}\right) \approx 1 - \alpha$$

skąd

$$P\left(\hat{p} - z_{1-\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \leq p \leq \hat{p} + z_{1-\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right) \approx 1 - \alpha.$$

(przybliżony) przedział ufności na poziomie ufności $1 - \alpha$ dla p :

$$\left[\hat{p} - z_{1-\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}, \hat{p} + z_{1-\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right].$$

por. Koronacki i Mielniczuk (2001, par. 3.3.4)

Przedział ufności dla proporcji— przykład

W przykładzie z proporcją ludzi będących w strefie ubóstwa:

$n = 10000$, $\hat{p} = 12,7$. Stąd realizacja 95-procentowego przedziału ufności dla p ma dla tych danych postać:

$$\left[0,127 - z_{1-\alpha/2} \sqrt{\frac{0,127(1 - 0,127)}{10000}}; 0,127 + z_{1-\alpha/2} \sqrt{\frac{0,127(1 - 0,127)}{10000}} \right] \approx [0,1204738; 0,1335262]$$

Badania sondażowe— margines błędu

Badanie przeprowadzone dla dziennika „USA Today” i telewizji CNN potwierdza spadające poparcie dla Busha - 49 procent przeciwko, 47 - za. Sondaż ten daje w listopadowych wyborach zwycięstwo Kerry’emu - 49 procent; Busha poparłoby 47 procent badanych.

CBS przeprowadziło sondaż telefonicznie w dniach 20-23 maja na reprezentatywnej próbie 1113 osób dorosłych. Podano informację, że margines błędu wynosi 3 procent.

Realizacja 95-procentowego przedziału ufności dla proporcji wyborców głosujących na Kerry’ego jest postaci $0,49 \pm 0,0294$, a realizacja 95-procentowego przedziału ufności dla proporcji wyborców głosujących na Busha jest postaci $0,47 \pm 0,0293$.

Często "margines błędu" w tego rodzaju badaniach— to połowa długości realizacji 95-procentowego przedziału ufności dla proporcji.

Przedział ufności— przypadek populacji skończonej

W wielu praktycznych sytuacjach chcielibyśmy skonstruować przedział ufności dla średniej populacji skończonej na podstawie wybranej losowo z tej populacji próby

Metody wyboru prób z populacji skończonej— Koronacki i Mielniczuk (2001, rodz. 7).

Polecana literatura

J. Koronacki i J. Mielniczuk, Statystyka dla studentów kierunków technicznych i przyrodniczych, WNT 2001, rodz. 3.3.