

3. Podstawowe pojęcia statystyki matematycznej i rachunku prawdopodobieństwa — wykład z 10.03.2008

Populacja i próba

Populacja- zbiorowość skończona lub nieskończona, w stosunku do której mają być formułowane wnioski.

Próba- skończony podzbiór populacji podlegający szczegółowemu badaniu.

Doświadczenie losowe

Losowo wybrana próba z populacji— odpowiada doświadczeniu losowemu.

Doświadczenie nazywamy losowym, jeśli:

- może być powtarzane (w zasadzie) w tych samych warunkach;
- wynik jego nie może być przewidziany w sposób pewny;
- zbiór wszystkich możliwych wyników doświadczenia jest określony przed przeprowadzeniem doświadczenia.

Przykłady doświadczeń losowych

Cena mieszkania losowo wybranego z listy mieszkań oferowanych do sprzedaży;

Czas bezawaryjnej pracy lodówki marki X;

Przynależność wyznaniowa losowo wybranego mieszkańca Warszawy;

Rezultat dwukrotnego rzutu monetą.

Przestrzeń zdarzeń elementarnych

Definicja 1 *Przestrzenią zdarzeń elementarnych nazywamy zbiór wszystkich możliwych wyników doświadczenia losowego. Pojedynczy element tej przestrzeni nazywać będziemy zdarzeniem elementarnym.*

Dowolny podzbiór przestrzeni zdarzeń elementarnych o skończonej liczbie elementów będziemy nazywać zdarzeniem.

W przypadku przestrzeni zdarzeń elementarnych o nieskończonej liczbie elementów, zdarzeniem nazywamy podzbiór przestrzeni zdarzeń elementarnych spełniający pewne dodatkowe założenia.

Uwaga Niektórzy autorzy określają zdarzenie jako dowolny podzbiór przestrzeni zdarzeń elementarnych (jest to sensowne uproszczenie — dla celów dydaktycznych).

Przestrzeń zdarzeń elementarnych- przykłady

Przestrzenią zdarzeń elementarnych dla doświadczenia losowego polegającego na:

- polegającego na losowym wyborze mieszkania, oferowanego do sprzedaży, i podaniu jego ceny: $[0, \infty)$;
- polegającego na dwukrotnym rzucie monetą : OO, OR, RO, RR ;
zapis OO oznacza: orzeł wypadł w pierwszym i drugim rzucie itd.;
- polegającego na dwukrotnym rzucie kostką:
 $(1, 1), (1, 2), \dots, (6, 5), (6, 6)$.

Czym jest prawdopodobieństwo

Podejście częstościowe

- rzucając monetą (uczciwą) N razy otrzymujemy n orłów— można oczekiwać, że n/N będzie dążyć do $1/2$ gdy $N \rightarrow \infty$

Podejście aksjomatyczne: każdemu zdarzeniu A , będącemu podzbiorowi przestrzeni zdarzeń elementarnych $\mathcal{S}$ przyporządkowujemy liczbę $P(A)$, spełniającą warunki:

- $0 \leq P(A) \leq 1$;
- gdy $A = \emptyset$, $P(A) = 0$;
- gdy $A = \mathcal{S}$, $P(A) = 1$;
- Jeśli zdarzenia $A_1, A_2, A_3, \dots$ się wzajemnie wykluczają (tj. $A_i \cap A_j = \emptyset$ dla $i \neq j$) i suma $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots$ jest zdarzeniem, to

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + \dots$$

Prawdopodobieństwo— przykład

Rzucamy dwukrotnie kostką. Jakie jest prawdopodobieństwo, że suma oczek będzie mniejsza lub równa 3.

W naszym przypadku $\mathcal{S} = \{(1, 1), (1, 2), \dots, (6, 5), (6, 6)\}$; przyjmujemy, że prawdopodobieństwo wszystkich zdarzeń elementarnych jest równe $\frac{1}{6 \times 6} = \frac{1}{36}$. Zdarzenie A , odpowiadające wyrzuceniu nie więcej niż 3 oczek, ma postać: $A = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1)\}$.

Stąd $P(A) = 3 \times \frac{1}{36} = \frac{1}{12}$.

Założenie o jednakowym prawdopodobieństwie zdarzeń elementarnych

Uwaga. Z formalnego punktu widzenia moglibyśmy przyjąć w rozważanym przykładzie np.

$$P((1, 1)) = P((1, 2)) = \frac{1}{2}, \quad P((1, 3)) = P((1, 4)) = \dots = P((6, 6)) = 0,$$

lecz otrzymany w ten sposób model matematyczny nie będzie „sensownie” opisywał naszego doświadczenia losowego.

Niezależność zdarzeń

Niezależność zdarzeń wiążemy z brakiem zależności przyczynowo-skutkowej.

Można uznać za niezależne:

- wyniki kolejnych rzutów kostką;
- ustanowienie rekordu świata w skoku w dal na najbliższej olimpiadzie i utworzenie nowego województwa do końca bieżącego roku

Definicja 2 *Mówimy, że zdarzenia A i B są niezależne, jeżeli*

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B).$$

Niezależność dla więcej niż dwóch zdarzeń— patrz [KM01], Definicja 2.7.

Niezależność zdarzeń— przykłady

W przykładzie z rzutem dwoma kostkami:

zdarzenie A — „wynik pierwszego rzutu jest równy jeden” i

zdarzenie B — „wynik drugiego rzutu jest równy 5”

są niezależne, gdyż

$$P(A) = P(B) = \frac{1}{6} \text{ oraz } P(A \cap B) = P((1, 5)) = \frac{1}{36}.$$

Pojęcie zmiennej losowej

Nieformalne określenie— wynik liczbowy doświadczenia losowego.

Przykładami zmiennej losowej są:

suma oczek otrzymanych po dwukrotnym rzucie kostką;

cena losowo wybranego mieszkania (z listy mieszkań oferowanych do sprzedaży);

temperatura człowieka, zmierzona w losowo wybranej chwili.

Precyzyjne określenie zmiennej losowej-przypadek, gdy przestrzeń zdarzeń elementarnych jest skończona:

funkcja określona na przestrzeni zdarzeń elementarnych.

Zmienna losowa— przykład

Rzucamy dwukrotnie kostką.

Niech X — suma oczek;

X — przykład zmiennej losowej.

X przyjmuje wartości $2, 3, \dots, 11, 12$ z prawdopodobieństwami:

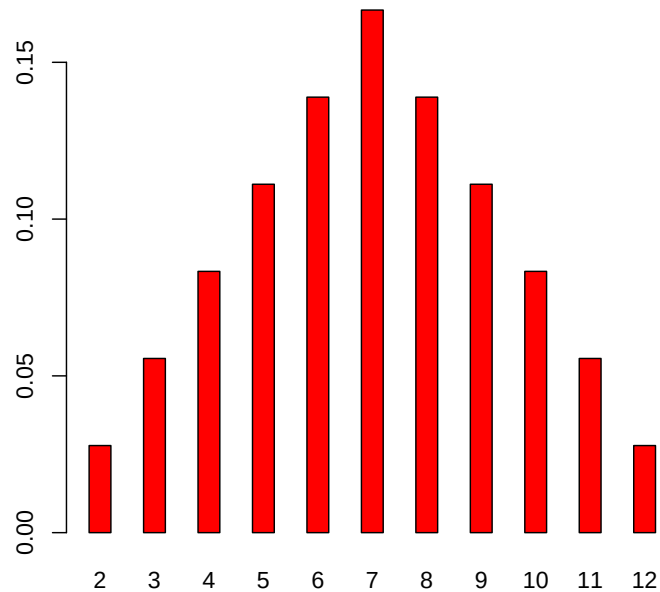
k	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P(X = k)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

Funkcja przyporządkowująca $k \in \{2, 3, \dots, 11, 12\}$ prawdopodobieństwo $P(X = k)$ — rozkład zmiennej X .

Notacja: $X = k$ —zbiór zdarzeń elementarnych ω takich, że $X(\omega) = k$.

Analogicznie: $X < k$ —zbiór zdarzeń elementarnych ω takich, że $X(\omega) < k$.

Rozkład zmiennej losowej X —wykres słupkowy



Rysunek 1: Wykres słupkowy przedstawiający rozkład zmiennej losowej X , sumy oczek otrzymanych w dwukrotnym rzucie kostką

Lektura uzupełniająca

T. Bednarski, Elementy matematyki w naukach ekonomicznych. Oficyna ekonomiczna. Kraków 2004, str. 218–228 [zwracam uwagę na różnicę pomiędzy pojęciami *próby losowej*, zdefiniowanej na str. 221, a pojęciem *próby*, zdefiniowanym podczas dzisiejszego wykładu!]

Koronacki, J., Mielniczuk, J. Statystyka dla studentów kierunków technicznych i przyrodniczych. WNT. Warszawa 2001, podrozdział 2.1.2, str. 62-79.