4,5. Dyskretne zmienne losowe (17.03; 31.03)

Definicja 1 *Zmienną losową nazywamy dyskretną (skokową), jeśli zbiór jej wartości* $x_1, x_2, \ldots,$ *można ustawić w ciąg.*

Zmienna losowa X, która przyjmuje wszystkie wartości z zadanego przedziału (a, b), nie jest zmienną losową dyskretną, ponieważ elementów tego przedziału nie da się ustawić w ciąg ("ponumerować").

- G. Cantor 1873— twierdzenie— wszystkich liczb rzeczywistych nie da się ustawić w ciąg.

Rozkład dyskretnej zmiennej losowej

Zbiór wartości dyskretnej zmiennej losowej X— ciąg $x_1, x_2, \ldots,$ (skończony lub nieskończony).

Rozkład zmiennej losowej dyskretnej X jest określony przez nieujemne liczby $p_1, p_2, \ldots$ spełniające warunki:

$$\sum p_i = 1, \tag{1}$$

$$p_i = P(X = x_i). \tag{2}$$

Dyskretne zmienne losowe— przykłady

Przykłady:

• Rozkład U, sumy oczek w dwukrotnym rzucie kostką (patrz poprzedni wykład);

• Rozkład Z, gdzie Z oznacza liczbę rzutów monetą, po której po raz pierwszy wypada orzeł (zdarzeniu polegającemu na tym, że orzeł wypadnie już w pierwszym rzucie, odpowiada wartość zmiennej Z równa 0).

z niezależności zdarzeń:

$$P(Z = k) = \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots .$$

Zmienna losowa Z przykład dyskretnej zmiennej losowej, dla której zbiór wartości: $\{0, 1, 2, \ldots\}$ nie jest skończony.

Rzuty osobiste— przykład

Niech X- liczba trafień w wykonywanym przez koszykarza A rzucie osobistym.Niech: T odpowiada trafieniu do kosza, C odpowiada chybieniu.

Przestrzeń zdarzeń elementarnych: $\mathcal{S} = \{C, T\}$.

Niech X- liczba trafionych rzutów. Zmienna X jest funkcją określoną na $\mathcal{S}$;

$$X(C) = 0, \quad X(T) = 1.$$

Zakładamy, że prawdopodobieństwo trafienia wynosi 0,9. Rozkład zmiennej losowej X można przedstawić przy pomocy tabelki:

k	0	1
$P(X = k)$	0,1	0,9

Liczba trafień Y w dwóch rzutach

Niech Y - liczba trafień w dwóch wykonywanych przez koszykarza A rzutach osobistych.
Przyjmujemy, że prawdopodobieństwo trafienia w jednym rzucie osobistym wynosi $0{,}9$ i zdarzenie trafienia/chybienia w drugim rzucie jest niezależne od analogicznego zdarzenia w pierwszym rzucie.

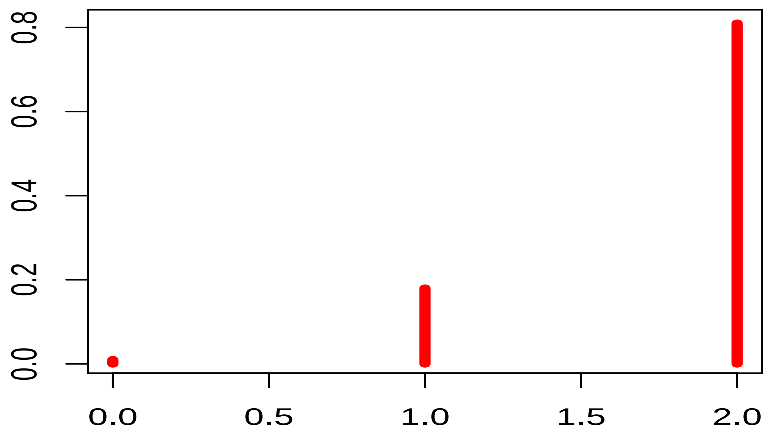
Można pokazać, że:

$$P(Y=0) = \left(\frac{1}{10}\right)^2 = 0{,}01,$$
$$P(Y=1) = 2 \times \frac{1}{10} \times \frac{9}{10} = 0{,}18,$$
$$P(Y=2) = \left(\frac{9}{10}\right)^2 = 0{,}81.$$

Liczba trafień Y w dwóch rzutach— c.d.

Rozkład można przedstawić w postaci tabelki lub wykresu słupkowego:

k	0	1	2
$P(X=k)$	0,01	0,18	0,81



Rozkład dwumianowy

Symbol Newtona $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ jest równy liczbie podzbiorów k-elementowych zbioru n-elementowego ($0 \leqslant k \leqslant n$).

Definicja 2 *Mówimy, że zmienna losowa X ma rozkład dwumianowy z parametrami $n \in \mathbb{N}$ i $0 < p < 1$, co w skrótowo zapisujemy $X \sim Bin(n, p)$ (lub $X \sim Bin(n; p)$), jeśli*

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n.$$

„Dziesięciokrotny rzut monetą”— przykład

Niech V oznacza liczbę orłów otrzymanych w dziesięciokrotnym rzucie monetą (zakładamy, że moneta jest „rzetelna”, tj. prawdopodobieństwo otrzymania orła jest równe $\frac{1}{2}$ oraz że wyniki kolejnych rzutów są od siebie niezależne). Chcemy obliczyć prawdopodobieństwo;

$$P(V \geqslant 9).$$

Rozwiązanie $V \sim Bin(10; 0{,}5)$,

$$\begin{aligned} P(V \geqslant 9) = & P(V = 9) + P(V = 10) = \\ = & \binom{10}{9} \left(0{,}5\right)^{9} (0{,}5)^{1} + \binom{10}{10} \left(0{,}5\right)^{10} (0{,}5)^{0} = \\ = & \frac{10}{1024} + \frac{1}{1024} = \frac{11}{1024}. \end{aligned}$$

Pojęcie dystrybuanty rozkładu

W obliczeniach podobnych do tych z poprzedniego przykładu użyteczne może się okazać pojęcie dystrybuanty zmiennej losowej.

Definicja 3 *Niech X będzie dowolną zmienną losową. Dystrybuantą zmiennej losowej X nazywamy funkcję F określoną jako:*

$$F(x) = P(X \leqslant x).$$

Uwaga. W powyższej definicji nie zakładamy, że zmienna X jest dyskretna.

„Dziesięciokrotny rzut monetą”—c.d.

V-liczba wyrzuconych orłów w dziesięciokrotnym rzucie monetą;

$$P(V \geqslant 9) = P(V = 9) + P(V = 10) = F_V(10) - F_V(8)$$

gdzie F_V jest dystrybuantą zmiennej losowej V.

Obliczenia wykonane w R-rze:

```
> pbinom(10,10,0.5)- pbinom(8,10,0.5)
[1] 0.01074219
```

pbinom- pierwsza litera odpowiada „dystrybuancie”, binom odpowiada rodzajowi rozkładu (ang. *binomial*- dwumianowy).
Korzystając z polecenia $pbinom$ można obliczać wartości dystrybuanty rozkładu $Bin(n, p)$ dla dużych wartości n.

Rozkład Poissona

Definicja 4 *Mówimy, że zmienna losowa X ma rozkład Poissona z parametrem $\lambda > 0$, jeśli przyjmuje ona wartości w zbiorze $\{0, 1, 2, \ldots,\}$ oraz*

$$P(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots.$$

Rozkład Poissona może być zastosowany z powodzeniem do opisu takich cech jak liczba nasion chwastów wśród nasion trawy, liczba klientów zgłaszających się dziennie do banku, liczba wypadków drogowych na placu Grunwaldzkim w danym dniu itd.

Wartość oczekiwana zmiennej losowej dyskretnej

Definicja 5 *Dla zmiennej losowej dyskretnej X wartość oczekiwana, jeśli istnieje, jest liczbą określoną wzorem*

$$EX = \sum_i x_i p_i,$$

w którym sumowanie obejmuje wszystkie wartości zmiennej X.

Uwaga Wartość oczekiwana zmiennej losowej nazywana jest literaturze także wartością średnią zmiennej losowej.

Wartość oczekiwana może być interpretowana jako "środek ciężkości" układu punktów materialnych $x_1, x_2, \ldots$ o wagach $p_1, p_2, \ldots$.

Własności wartości oczekiwanej

Łatwo widać, że wartość oczekiwana zmiennej losowej $Y = aX + b$ jest równa

$E(aX + b) = aEX + b$ (wartość oczekiwana ma własność *liniowości*).

Jeśli wartości oczekiwane zmiennych losowych X_1 i X_2 istnieją i są równe, odpowiednio, μ_1 i μ_2, to

$$E(X_1 + X_2) = \mu_1 + \mu_2.$$

Wariancja zmiennej losowej

Definicja 6 *Wariancję zmiennej losowej X określamy wzorem*

$$VarX = E(X - \mu)^2,$$

gdzie $\mu = EX$.

Wariancja jest równa wartości oczekiwanej kwadratu odchylenia wartości zmiennej losowej od swojej wartości przeciętnej.

Dla $a > 0$ mamy:

$$Var(aX + b) = a^2 Var(X).$$

Dla zmiennej dyskretnej X wariancja jest równa

$$VarX = \sum_i (x_i - \mu)^2 p_i.$$

Własności wariancji rozkładu

Widzimy, że wariancja jest tym większa, im większa jest średnia odległość punktów x_i od środka ciężkości μ- wartości oczekiwanej.

Jeśli wszystkie wartości x_i są sobie równe, wtedy wariancja jest równa zeru.

Odchylenie standardowe

Odchylenie standardowe zmiennej losowej X, oznaczane przez DX, definiujemy jako pierwiastek kwadratowy wariancji X. Odchylenie standardowe zmiennej losowej X czesto jest też oznaczane grecką literą σ.

Można pokazać, że dla $a \geqslant 0$:

$$D(aX + b) = aDX. \tag{3}$$

Niezależność zmiennych losowych

Definicja 7 *Mówimy, że zmienne losowe* X *i* Y *są niezależne, jeżeli*

$$P(X \in [a,b] \wedge Y \in [c,d]) = P(X \in [a,b]) \times P(Y \in [c,d])$$

dla dowolnych przedziałów $[a,b]$ *i* $[c,d]$.

Intuicyjnie: niezależne zmienne losowe odpowiadają realizacje liczbowe niezależnych zmiennych losowych.

Przykład

Rozważmy jeszcze raz doświadczenie losowe polegające na wykonaniu prez zawodnika A dwóch rzutów osobistych (prawdopodobieństwo trafienia jest równe $0{,}9$).

Niech Y_1 oznacza wynik pierwszego rzutu (0, jeśli A chybił, 1 jeśli A trafił) a Y_2 wynik drugiego rzutu.

Przyjęliśmy, że zdarzenie trafienia/chybienia w drugim rzucie jest niezależne od analogicznego zdarzenia w pierwszym rzucie.

Przestrzeń zdarzeń elementarnych $\mathcal{S} = \{(C,C),(C,T),(T,C),(T,T)\}$

Przykład—c.d.

Mamy

$$P((C,C)) = (0{,}1)^2 = 0{,}01,$$

$$P((C,T)) = P((T,C)) = 0{,}1 \times 0{,}9 = 0{,}09,$$

$$P((T,T)) = (0{,}9)^2)^2 = 0{,}81,$$

stąd:

$$P(Y_1 = 0) = P(\{(C,C),(C,T)\} = 0{,}01 + 0{,}09 = 0{,}1,$$

$$P(Y_1 = 1) = P(\{(T,C),(T,T)\} = 0{,}09 + 0{,}81 = 0{,}9,$$

$$P(Y_2 = 0) = P(\{(C,C),(T,C)\} = 0{,}01 + 0{,}09 = 0{,}1,$$

$$P(Y_2 = 1) = P(\{(C,T),(T,T)\} = 0{,}09 + 0{,}81 = 0{,}9$$

i $P((Y_1 = 0) \wedge (Y_2 = 0)) = 0{,}01 = P((Y_1 = 0)) \times P((Y_2 = 0))$ itd.;
Stąd: zmienne Y_1 i Y_2 są niezależne.

Przykład—c.d.

Jesteśmy zainteresowani wartością oczekiwaną i wariancją zmiennej losowej Y.

Mamy $E(Y) = E(Y_1) + E(Y_2)$. Obliczamy
$E(Y_1) = 0{,}1 \times 0 + 0{,}9 \times 1 = 0{,}9$;
analogicznie $E(Y_2) = 0{,}9$; stąd $E(Y) = 2 \times 0{,}9 = 1{,}8$;

Z równości:

$$Var(Y_1) = Var(Y_2) = (0 - 0{,}9)^2 \times 0{,}1 + (1 - 0{,}9)^2 \times 0{,}9 = 0{,}09$$

oraz z faktu, że Y_1 i Y_2 są niezależne, wynika:

$$Var(Y) = Var(Y_1) + Var(Y_2) = 2 \times 0{,}09 = 0{,}18.$$

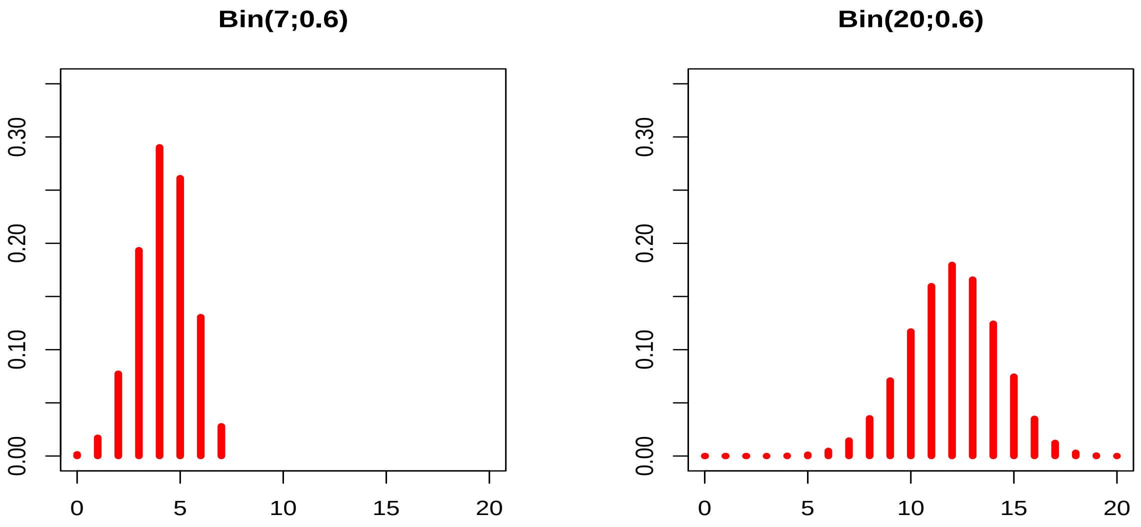
Wariancję zmiennej losowej Y można byłoby obliczyć bezpośrednio z definicji— byłoby to trochę bardziej żmudne.

Wartości oczekiwane i wariancje rozkładów: dwumianowgo i Poissona

Można pokazać, że wartość oczekiwana zmiennej losowej X,
$X \sim Bin(n, p)$ wynosi np, a wariancja tej zmiennej jest równa
$Var(Y) = np(1 - p)$.
można skorzystać z przedstawienia zmiennej losowej X jako sumy niezleżnych zmiennych losowych o rozkładzie $Bin(1, p)$

Można pokazać również, że dla zmienej losowej Z o rozkładzie Poissona z parametrem λ :

$$E(Z) = \lambda \text{ oraz } Var(Z) = \lambda.$$



Rysunek 1: Wykresy słupkowe przedstawiające rozkłady $Bin(7;0{,}6)$ oraz $Bin(20;0{,}6)$

Wariancja $X_1 \sim Bin(7;0{,}6)$: $7 \times 0{,}6 \times 0{,}4 = 1{,}68$
Wariancja $X_2 \sim Bin(20;0{,}6)$: $20 \times 0{,}6 \times 0{,}4 = 4{,}8$
X_2 jest bardziej „rozproszona”!

Lektura uzupełniająca

T. Bednarski, Elementy matematyki w naukach ekonomicznych. Oficyna ekonomiczna. Kraków 2004, str. 228–234.

Koronacki, J., Mielniczuk, J. Statystyka dla studentów kierunków technicznych i przyrodniczych. WNT. Warszawa 2001, podrozdział 2.2.1, str. 94–110.