1. Autobus linii R odjeżdża z pewnego przystanku co pół godziny. Czas oczekiwania Y na ten autobus (przez pasażera, który nie zna rozkładu jazdy i przychodzi w „losowym" momencie na przystanek), ma rozkład jednostajny $U(0; 0{,}5)$; jest to rozkład ciągły, którego funkcja gęstości ma postać:
$$v(x) = \begin{cases} 2, & \text{jeśli } 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}, \\ 0 & \text{jeśli } x < 0 \text{ lub } x > \frac{1}{2}. \end{cases}$$
   (a) oblicz $P(\frac{1}{4} < Y < \frac{1}{2})$— tj. prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że czas oczekiwania będzie dłuższy niż $\frac{1}{4}$ godziny i krótszy niż $\frac{1}{2}$ godziny;
   (b) oblicz wartość oczekiwaną i wariancję zmiennej Y;
   (c) znajdź postać dystrybuanty zmiennej losowej Y.
2. Dla jakiej wartości parametru c funkcja h określona wzorem:
$$h(x) = \begin{cases} cx, & \text{jeśli } 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ 2c - cx, & \text{jeśli } 1 < x \leqslant 2, \\ 0, & \text{jeśli } x < 0 \text{ lub } x > 2, \end{cases}$$
   jest gęstością (pewnej zmiennej losowej)?
3. Oblicz wartość oczekiwaną zmiennej losowej typu ciągłego W z funkcją gęstości h (z odpowiednio dobraną stałą c — por. poprzednie zadanie).
4. Zakładamy, że Y, wzrost dorosłych mężczyzn w mieście C jest zmienną losową o rozkładzie $N(175, 8)$. Oblicz:
   (a) P(Y>175);
   (b) P(Y<179);
   (c) P(X<171);
   (d) P(167<X<179).
5. Zakładamy, że dochód miesięczny (na osobę w rodzinie) losowo wybranego mieszkańca miejscowości A ma rozkład $N(700, 160)$. Oblicz, jakie jest prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że losowo wybrany mieszkaniec A będzie miał dochód (na osobę w rodzinie):
   (a) większy niż 860 zł;
   (b) mniejszy niż 620 zł;
   (c) większy niż 540 zł i mniejszy niż 780 zł.
6. Uzasadanij, że dla zmiennej losowej X o rozkładzie normalnym $N(\mu, \sigma)$ prawdziwe są równości:
   (a) $P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0{,}9545$
   (b) $P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0{,}9973$ („prawo trzech sigm")

7. Kozystając z centralnego twierdzenia granicznego uzasadnij, że następujące zmienne losowe mają rozkład zbliżony do normalnego:
   (a) suma wydatków 20 kolejnych klientów w sklepie;
   (b) suma pieniędzy pobranych z pewnego bankomatu danego dnia.

8. Władze gminy A rozważają problem: czy gminie potrzebna jest nowa linia autobusowa, łącząca miasta i wioski tej gminy z pólnocną częścią miasta W. Obiegowa opinia sugeruje, że 50 procent mieszkańców gminy zainteresowanych jest korzystaniem z nowej linii, podczas gdy władze są przekonane, że znacznie więcej niż 50 procent mieszkańców gminy A jest zainteresowana korzystaniem z tej linii. Na dwunastu ankietowanych mieszkańców 10 odpowiedziało „tak" na pytanie „Czy jesteś zainteresowany nową linią?", pozostałych dwóch respondentów udzieliło odpowiedzi negatywnej. Zweryfikuj hipotezę

$$H_0 : p = 0{,}5 \text{ przeciw } H_1 : p > 0{,}5,$$

   gdzie p oznacza frakcję mieszkańców A zainteresowanych nową linią. Przyjmij poziom istotności $\alpha = 0{,}05$.

9. Kontynuujemy rozważania dotyczące doświadczenia losowego omawianego w poprzednim zadaniu. Niech Y oznacza liczbę odpowiedzi „tak" (Y jest zmienną losową). Dla y, realizacji statystyki testowej Y, p-wartość w przypadku hipotezy jednostronnej, rozważanej w poprzednim zadaniu, można zdefiniować jako prawdopodobieństwo $P(Y \geqslant y)$. Dla danych z poprzedniego zadania (na 12 pytanych respondentów 10 zainteresowanych nową linią) znajdź p-wartość.

10. Wg. fachowych ocen koszykarz K trafia do kosza wykonując rzut osobisty z prawdopodobieństwem p rówym $0{,}8$. Kibic klubu, w którym gra K, na podstawie swoich obserwacji, jest przekonany, że prawdopodobieństwo p jest mniejsze niż $0{,}8$. W ostatnim meczu K wykonywał 5 rzutów osobistych; z czego trafił 2 razy. Czy można twierdzić, że to nasz kibic ma rację a fachowcy się mylili?

    Wskazówka. Należy przyjąć, że w każdym rzucie prawdopodobieństwo trafienia jest równe $p \in (0, 1)$ oraz że zdarzenia polegające na trafieniu (lub chybieniu) w kolejnych rzutach są niezależne. Następnie należy:
    (a) sformułować hipotezę zerową H_0 i hipotezę alternatywną H_1;
    (b) wyznaczyć obszar krytyczny, przyjmując poziom istotności $\alpha = 0{,}05$;
    (c) podjąć decyzję o przyjęciu lub odrzuceniu hipotezy zerowej.

Mariusz Grządziel