1. Uzasadnij, że dla dowolnego $\alpha \in (0,1)$ kwantyle rozkładu normalnego $z_\alpha$ i $z_{1-\alpha}$ spełniają zależność:

$$z_\alpha + z_{1-\alpha} = 0.$$

2. Oblicz następujące kwantyle rozkładu normalnego: (a) $z_{0,5}$; (b) $z_{0,95}$; (c) $z_{0,975}$ (d) $z_{0,05}$.

3. (Praca zaliczeniowa nr 2; termin oddania pracy: 26 maja) W państwie S w roku 2000 procent ludzi żyjących w ubóstwie (poverty rate- w skrócie PR) wynosił $p_0 = 10 + \frac{a}{10}$ a w 2002 roku: $p_1 = 12 + \frac{b}{10}$, (gdzie $a$— liczba liter w Twoim imieniu, $b$ — liczba liter w Twoim nazwisku).

   Np. student o imieniu Jan i nazwisku Nowak powinien przyjąć: $p_0 = 10{,}3\% = 0{,}103$ i $p_1 = 12{,}5\% = 0{,}125$.

   Dane dotyczące 2000 roku są dokładne (pochodzą ze spisu powszechnego), dane dotyczące 2002 roku oparte są na rezultatach badań sondażowych, przeprowadzonych dla reprezentatywnej 2500-elementowej próby respondentów.

   (a) sformułować hipotezę zerową $H_0 : p = p_0$ i hipotezę alternatywną $H_1 : p > p_0$. Zweryfikować je przyjmując poziom istotności $\alpha = 0{,}05$.

   (b) oblicz $P(Z > z)$ przy założeniu prawdziwości hipotezy $H_0$ (p-wartość odpowiadającą wartości statystyki testowej $Z$ równej

   $$z = \frac{p_1 - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}}$$

   oraz hipotezom: $H_0$ i $H_1$). Skorzystaj z faktu, że $Z$ ma w przybliżeniu rozkład normalny z odpowiednimi parametrami.

   (c) sformułować hipotezę zerową $H_0 : p = p_0$ i hipotezę alternatywną $H_1^{'} : p \neq p_0$. Zweryfikować je przyjmując poziom istotności $\alpha = 0{,}01$.

   **Uwaga.** W zadaniu należy zastosować test dla proporcji, w którym rozkład statystyki testowej „przybliżamy” rozkładem normalnym.

4. Niech $Y = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$, gdzie $X_i \sim Bin(1,p)$, $n \in \mathbb{N}$, $p \in (0,1)$, a $Y_1 = \frac{Y}{n}$ ($Y_1$ oznacza „proporcję”). Uzasadnij, że statystyka

   $$Z = \frac{Y_1 - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}}$$

   ma w przybliżeniu rozkład normalny $N(0,1)$ przy założeniu, że $p = p_0$.

*Mariusz Grządziel*