

1. Oblicz następujące kwantyle rozkładu t-Studenta: (a) $t_{0,9;10}$; (b) $t_{0,95;12}$; (c) $t_{0,975;6}$.
2. Cena metra kwadratowego (w tys. zł) z dla 15 losowo wybranych mieszkań w mieście A (dane pochodzą z kwietnia 2006):

3,75; 3,89; 5,09; 3,77; 3,53; 2,82; 3,16; 2,79; 4,34; 3,61; 4,31; 3,31; 2,50; 3,27; 3,05.

W prasie podano informację, że średnia cena metra kwadratowego mieszkań w A w 2004 roku wynosiła 2800 zł. Czy powyższe dane potwierdzają obiegową opinię, że ceny mieszkań istotnie wzrosły od 2004 roku— zweryfikuj tę hipotezę przyjmując poziom istotności $\alpha = 0,01$. Zakładamy, że analizowane dane stanowią próbę prostą z rozkładu normalnego $N(\mu, \sigma)$.

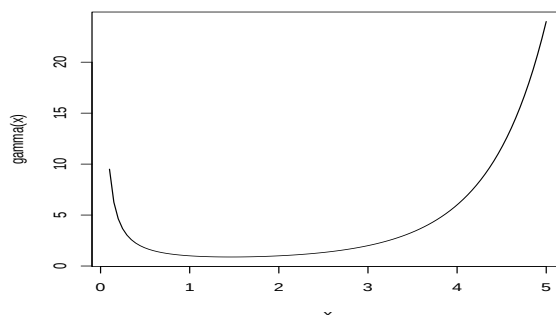
Wskazówka. Należy zweryfikować

$$H_0 : \mu = 2800 \text{ przeciw } H_1 : \mu > 2800$$

3. Funkcja Γ jest określona wzorem

$$\Gamma(t) = \int_0^\infty x^{t-1} e^{-x} dx, \quad t > 0;$$

- (a) uzasadnij, że $\Gamma(t) > 0$ dla $t > 0$.
- (b) sprawdź, że $\Gamma(1) = 1$;
- (c) całkując przez części wykaż, że $\Gamma(t+1) = t\Gamma(t)$ dla $t > 0$.



Rysunek 1: Wykres funkcji Γ na $[0, 5]$.

4. Gęstość rozkładu t-Studenta z n stopniami swobody określona jest wzorem

$$t(x) = \frac{\Gamma((n+1)/2)}{\Gamma(n/2)\sqrt{\pi n}} \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-(n+1)/2}.$$

Uzasadnij, że funkcja t jest (a) dodatnia na $\mathbb{R}$; (b) parzysta.

5. Uzasadnij, że $t_{\alpha;n} = t_{1-\alpha;n}$ dla $\alpha \in (0; 0,5)$, $n \in \mathbb{N}$.

Mariusz Grzędziel