Przedziały ufności dla średniej

dr Mariusz Grządziel

Wykład 11; 25 kwietnia 2012

Przykład
Cena metra kwadratowego (w tys. zł) z dla 14 losowo wybranych mieszkań w mieście A:

$$3{,}75; 3{,}89; 5{,}09; 3{,}77; 3{,}53; 2{,}82; 3{,}16; 2{,}79; 4{,}34; 3{,}61;$$
$$4{,}31; 3{,}31; 2{,}50; 3{,}27.$$

Podczas ostatniego wykładu weryfikowaliśmy

$$H_0 : \mu = \mu_0 \text{ przeciw } H_1 : \mu \neq \mu_0,$$

gdzie $\mu_0 = 3{,}8$. Założyliśmy, że dane dotyczące cen metra kw. mieszkań w A są realizacją próby prostej z rozkładu normalnego $N(\mu, \sigma)$.
Obliczenia w środowisku R:

```
> t.test(z,mu=3.8)

        One Sample t-test

data:  z

t = -1.1777, df = 13, p-value = 0.26

alternative hypothesis:

true mean is not equal to 3.8

95 percent confidence interval:

 3.180491 3.982366

sample estimates:

mean of x

 3.581429
```

Chcielibyśmy poznać znaczenie terminu: „95 percent confidence interval" (95-procentowy przedział ufności)!

Testy i przedziały ufności
Załóżmy, że nie dysponujemy danymi dotyczącymi cen mieszkań w poprzednich kwartałach
Problem: dla jakich μ_0 hipoteza $H_0 : \mu = \mu_0$ (przy hipotezie alternatywnej $H_1 : \mu \neq \mu_0$) nie będzie odrzucona przy poziomie istotności $\alpha = 0{,}05$.
Odpowiedź: dla

$$\mu_0 \in (\bar{x} - t_{1-\alpha/2,n-1}\frac{s}{\sqrt{n}}, \bar{x} + t_{1-\alpha/2,n-1}\frac{s}{\sqrt{n}}).$$

Dla naszych konkretnych danych ten przedział jest równy

$$(3{,}18; 3{,}98).$$

Ten przedział to realizacja 95-procentowego przedziału ufności dla μ (lub krócej — 95-procentowy przedział ufności dla średniej μ).

Przedział ufności dla średniej rozkładu normalnego — przypadek nieznanego odchylenia standardowego
Niech $X_1, X_2, \ldots, X_n$— próba (prosta) z rozkładu $N(\mu, \sigma)$. Mamy:

$$P(\bar{X} - t_{1-\alpha/2,n-1}\frac{\mathcal{S}}{\sqrt{n}} \leqslant \mu \leqslant \bar{X} + t_{1-\alpha/2,n-1}\frac{\mathcal{S}}{\sqrt{n}}) = 1 - \alpha.$$

Przedział $(\bar{X} - t_{1-\alpha/2,n-1}\frac{\mathcal{S}}{\sqrt{n}}, \bar{X} + t_{1-\alpha/2,n-1})\frac{\mathcal{S}}{\sqrt{n}}$— przedział ufności dla μ na poziomie ufności $1 - \alpha$.
Końce przedziału ufności — zmienne losowe!
W praktyce- często realizacje przedziałów ufności (dla konkretnych danych)- również są nazywane przedziałami ufności.

Przedział ufności dla średniej rozkładu normalnego — przypadek znanego odchylenia standardowego
Niech $X_1, X_2, \ldots, X_n$— próba (prosta) z rozkładu $N(\mu, \sigma)$, σ jest znane.
Przedział $(\bar{X} - z_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X} + z_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}})$— przedział ufności dla μ na poziomie ufności $1 - \alpha$.
$z_{1-\alpha/2}$ — kwantyl rozkładu normalnego rzędu $1 - \alpha/2$.
Dla realizacji próby: $x_1, x_2, \ldots, x_n$— realizacja tego przedziału ufności: $(\bar{x} - z_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}})$.

Przedział ufności dla proporcji
W państwie P w roku 2004 proporcja p ludzi żyjących w ubóstwie (poverty rate- w skrócie PR) wynosił 12,7; dane pochodzą z badań sondażowych, przeprowadzonych dla reprezentatywnej i 10000-elementowej próby respondentów (zakładamy, że jest ona realizacją próby prostej z $Bin(1, p)$). Jesteśmy zainteresowani 95-procentowym przedziałem ufności dla p.

Przedział ufności dla proporcji— rozkład częstości $\hat{p}$
Niech Y— liczba żyjących w ubóstwie— spośród n ankietowanych.
Oczywiście $Y \sim Bin(n, p)$— gdzie p nieznane;

Korzystając z centralnego twierdzenia granicznego: $\hat{p} = \frac{Y}{n}$ ma w przybliżeniu rozkład normalny $N\left(p, \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right)$.
Innym sensownym przybliżeniem rozkładu częstości $\frac{Y}{n}$ jest

$$N\left(\hat{p}, \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right), \quad \hat{p} \text{ oznacza tu realizację zmiennej } Y/n \tag{1}$$

(por. książkę J. Koronackiego i J. Mielniczuka, Twierdzenie 2.16; str. 149).
Można uznać, że powyższe przybliżenia rozkładu $\hat{p} = \frac{Y}{N}$ są dostatecznie dobre, gdy $np \geqslant 5$ i $n(1-p) \geqslant 5$.

Przedział ufności dla proporcji
Z równości (1) wynika, że

$$P\left(-z_{1-\alpha/2} \leqslant \frac{\hat{p}-p}{\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}} \leqslant z_{1-\alpha/2}\right) \approx 1-\alpha$$

skąd

$$P\left(\hat{p} - z_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \leqslant p \leqslant \hat{p} + z_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right) \approx 1-\alpha.$$

(przybliżony) przedział ufności na poziomie ufności $1-\alpha$ dla p:

$$\left[\hat{p} - z_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}, \hat{p} + z_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right].$$

por. Koronacki i Mielniczuk (2001, par. 3.3.4).

Przedział ufności dla proporcji— przykład
W przykładzie z proporcją ludzi będących w strefie ubóstwa: $n = 10000, \hat{p} = 12{,}7\%$.
Stąd realizacja 95-procentowego przedziału ufności dla p ma dla tych danych postać:

$$\left[0{,}127 - z_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{0{,}127(1-0{,}127)}{10000}}; 0{,}127 + z_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{0{,}127(1-0{,}127)}{10000}}\right] \approx$$
$$[0{,}1204738; 0{,}1335262].$$

Badania sondażowe— margines błędu
Badanie przeprowadzone dla dziennika „USA Today” i telewizji CNN potwierdza spadające poparcie dla Busha - 49 procent przeciwko, 47 - za. Sondaż ten daje w listopadowych wyborach zwycięstwo Kerry’emu - 49 procent; Busha poparłoby 47 procent badanych.
CBS przeprowadziło sondaż telefonicznie w dniach 20-23 maja na reprezentatywnej próbie 1113 osób dorosłych. Podano informację, że margines błędu wynosi 3 procent.
Realizacja 95-procentowego przedziału ufności dla proporcji wyborców głosujących na Kerry’ego jest postaci $0{,}49 \pm 0{,}0294$, a realizacja 95-procentowego przedziału ufności dla proporcji wyborców głosujących na Busha jest postaci $0{,}47 \pm 0{,}0293$.
Często "margines błędu" w tego rodzaju badaniach — to połowa długości realizacji 95-procentowego przedziału ufności dla proporcji.

Przedział ufności — przypadek populacji skończonej
W wielu praktycznych sytuacjach chcielibyśmy skonstruować przedział ufności dla średniej populacji skończonej na podstawie wybranej losowo z tej populacji próby Metody wyboru prób z populacji skończonej— Koronacki i Mielniczuk (2001, rodz. 7).

Polecana literatura
J. Koronacki i J. Mielniczuk, Statystyka dla studentów kierunków technicznych i przyrodniczych, WNT 2001, rodz. 3.3.