

Testy dla dwóch prób w rodzinie rozkładów normalnych

dr Mariusz Grządziel

Wykład 12; 14 maja 2012

Przykład

Rozważamy dane wygenerowane losowo; (podobne do danych z przykładu 7.2 z książki A. Łomnickiego)

$n_1 = 9$ poletek w dąbrowie, $n_2 = 10$ poletek w borze Liczby pajaków (na poletkach) w dąbrowie : 45, 57, 30, 61, 52, 64, 50, 60, 48;

Liczby pajaków (na poletkach) w borze: 46, 32, 39, 34, 46, 31, 37, 26, 52, 21.

Chcielibyśmy zweryfikować hipotezę o równości liczby pajaków w borze i dąbrowie.

Formalizacja problemu

Zakładamy, że x_1, x_2, \dots, x_{n_1} , liczby pajaków na poletkach w dąbrowie, są realizacjami próby prostej X_1, X_2, \dots, X_{n_1} ,

$$X_1, X_2, \dots, X_{n_1}, \quad X_i \sim N(\mu_1, \sigma_1), \quad i = 1, 2, \dots, n_1$$

oraz że y_1, y_2, \dots, y_{n_2} są realizacjami próby prostej

$$Y_1, Y_2, \dots, Y_{n_2}, \quad Y_i \sim N(\mu_2, \sigma_2), \quad i = 1, 2, \dots, n_2.$$

W naszym przykładzie :

$$x_1 = 45, \dots, y_1 = 46, \dots$$

Chcemy zweryfikować hipotezę

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 \text{ przeciwko hipotezie } H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$$

Weryfikacja hipotezy o równości wariancji

Przy założeniu, że: $\sigma_1 = \sigma_2$ (warunek "jednorodności wariancji" jest spełniony) moglibyśmy zastosować test Studenta dla jednorodnych wariancji dla porównania dwóch średnich. Ma on wiele zalet (z punktu widzenia teorii testowania hipotez). Dlatego pierwszym krokiem powinno być sprawdzenie hipotezy o równości wariancji:

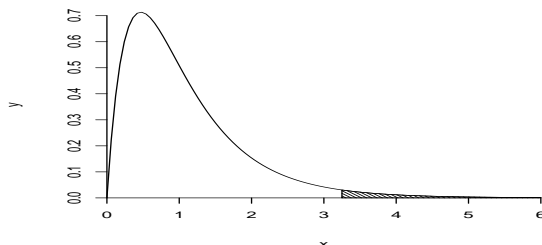
$$H_0^j : \sigma_1^2 = \sigma_2^2 \text{ przeciwko } H_1^j : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2.$$

Odpowiednią statystyką testową dla weryfikacji H_0^j przeciwko H_1^j jest

$$F = \frac{S_1^2}{S_2^2}$$

gdzie S_1^2 jest wariancją próbkową dla pierwszej próby, S_2^2 jest wariancją próbkową dla drugiej próby. Można pokazać, że F ma rozkład F_{n_1-1, n_2-1} (rozkład F-Snedecora z $n_1 - 1$ i $n_2 - 1$ stopniami swobody).

Rozkład F-Snedecora



Rysunek 1: Wykres gęstości rozkładu $F_{4,30}$; obszar zakreskowany odpowiada wartościom większym niż $F_{0,975;4;30} = 3,25$.

Funkcja gęstości rozkładu F_{n_1, n_2} patrz Koronacki i Mielniczuk (2001, str. 208).

Hipoteza o równości wariancji — obszar krytyczny

Obszar krytyczny, dla poziomu istotności α , ma postać

$$[0, F_{\alpha/2; n_1, n_2}] \cup [F_{1-\alpha/2; n_1, n_2}, \infty).$$

Weryfikacja

$$H_0^j : \sigma_1^2 = \sigma_2^2 \text{ przeciwko } H_1^j : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2.$$

może być również oparta na statystyce

$$F' = \frac{\max(S_1^2, S_2^2)}{\min(S_1^2, S_2^2)};$$

obszar krytyczny (odpowiadający F') ma postać:

$$[F_{1-\alpha/2; n_1, n_2}, \infty)$$

Przykład — obliczenia

$$s_1^2 = 108,3611; \quad s_2^2 = 92,7111;$$

widzimy, że $s_1^2 \geq s_2^2$;

f' , realizacja statystyki testowej F' , jest równa

$$f' = \frac{s_1^2}{s_2^2} = 1,168804.$$

Wartość kwantyla rzędu 0,975 rozkładu $f_{8,9}$ (oznaczmy ją przez $f_{0,975,8,9}$) jest równa

$$f_{0,975,8,9} = 4,101956,$$

wartość statystyki testowej nie należy do obszaru krytycznego $[4,101956, \infty)$, więc nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy H_0^j .

Testowanie hipotezy o równości średnich — przypadek jednorodnych wariancji

Jeśli X_1, X_2, \dots, X_{n_1} jest próbą prostą, $X_i \sim N(\mu_1, \sigma)$, a Y_1, Y_2, \dots, Y_{n_2} jest również próbą prostą, $Y_i \sim N(\mu_2, \sigma)$, (zauważ, że wariancje obu rozkładów, z których pochodzą próby, są równe!), wtedy można do weryfikacji hipotezy

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 \quad \text{przeciwko} \quad H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$$

można zastosować "klasyczny" test t-Studenta dla dwóch prób.

Statystyka testowa ma postać:

$$T = \frac{|\bar{X} - \bar{Y}|}{S_{X,Y}},$$

gdzie

$$S_{X,Y} = \sqrt{\frac{(n_1 - 1)\mathcal{S}_1^2 + (n_2 - 1)\mathcal{S}_2^2}{n_1 + n_2 - 2}} \sqrt{\frac{n_1 + n_2}{n_1 n_2}},$$

\mathcal{S}_1^2 oznacza wariancję zmiennych $X_i, i = 1, \dots, n_1$, \mathcal{S}_2^2 oznacza wariancję zmiennych $Y_i, i = 1, \dots, n_2$,

a obszar krytyczny, dla poziomu istotności $\alpha \in (0, 1)$:

$$[t_{1-\alpha/2, n_1+n_2-2}, \infty).$$

Przykład — obliczenia

Przyjmujemy $\alpha = 0,05$ (poziom istotności testowania hipotezy);

$$n_1 = 9, \quad n_2 = 10$$

$$\bar{x} = 51,88889 \quad \bar{y} = 36,4$$

$$s_1^2 = 108,3611, \quad s_2^2 = 92,71111$$

$$\begin{aligned} s_{x,y}^2 &= \frac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{n_1 + n_2 - 2} \times \frac{n_1 + n_2}{n_1 n_2} = \\ &= \frac{8 \times 108,3611 + 9 \times 92,71111}{9 + 10 - 2} \times \frac{9 + 10}{9 \times 10} = \\ &= 21,12712 \end{aligned}$$

$$s_{x,y} = \sqrt{21,12712} = 4,596424$$

$$t = \frac{|\bar{x} - \bar{y}|}{s_{x,y}} = \frac{51,88889 - 36,4}{4,596424} \approx 3,369769.$$

Odczytujemy z tablic rozkładu t-Studenta (lub obliczamy korzystając z R-owskiego polecenia **qt**)

$$t_{0,975;17} = 2,109816.$$

Wartość statystyki testowej należy do obszaru krytycznego, a zatem należy odrzucić hipotezę o równości liczebności pajaków na jednostkę powierzchni w borze i dąbrowie.

Obliczenia w środowisku R

Powyższe obliczenia można wykonać przy użyciu programu R w następujący sposób:

```
> x
[1] 45 57 30 61 52 64 50 60 48
> y
[1] 46 32 39 34 46 31 37 26 52 21
> t.test(x,y,var.equal=TRUE)

Two Sample t-test

data: x and y
t = 3.3698, df = 17, p-value = 0.003638
alternative hypothesis:
true difference in means is not equal to 0
95 percent confidence interval:
 5.791281 25.186497
sample estimates:
mean of x mean of y
 51.88889  36.40000
```

Wersje testu t dla przypadku niejednorodnych wariancji

Jeśli nie można przyjąć założenia o jednorodności wariancji, wtedy należy użyć wersji testu t dla przypadku niejednorodnych wariancji takich jak: - test oparty na statystyce Cochran-Coxa (por. Łomnicki, Rozdz. 7) - test oparty na aproksymacji Welcha (dostępny w pakiecie R) Należy pamiętać, że korzystanie z powyższych testów wymaga założenia normalności porównywanych populacji.

Obliczenia przy braku założenia dotyczącego równości wariancji

```
> t.test(x,y,var.equal=FALSE)

Welch Two Sample t-test

data: x and y
t = 3.3552, df = 16.413, p-value = 0.003907
alternative hypothesis:
true difference in means is not equal to 0
95 percent confidence interval:
 5.722523 25.255255
sample estimates:
mean of x mean of y
 51.88889  36.40000
```

Obliczenia przy braku założenia dotyczącego równości wariancji — komentarz

Wartość statystyki testowej t - obliczana jest trochę inaczej niż w „przypadku równych wariancji”; liczba stopni swobody— nie jest liczbą całkowitą!

Polecana literatura

J. Koronacki i J. Mielniczuk, Statystyka dla studentów kierunków technicznych i przyrodniczych, WNT 2001, str. 229-237.

A. Łomnicki, Wprowadzenie do statystyki dla przyrodników, Wyd. 3, Rozdział 7.