Estymacja parametrów w modelu normalnym

dr Mariusz Grządziel

Wykład 7; 26 marca 2012

Model normalny
Przez model normalny będziemy rozumieć rodzinę rozkładów normalnych $N(\mu, \sigma)$, $\mu \in \mathbb{R}, \sigma > 0$. Z Centralnego Twierdzenia Granicznego wynika, że wiele zjawisk i procesów opisywanych przez nauki ekonomiczne i przyrodnicze ma rozkład zbliżony do rozkładu normalnego.

Pojęcie losowej próby prostej

Definicja 1. *n-elementową losową próbą prostą nazywamy ciąg n niezależnych zmiennych losowych o jednakowych rozkładach prawdopodobieństwa.*

Uwaga 1. *Niektórzy autorzy utożsamiają losową próbę prostą $X_1, X_2, \ldots, X_n$ z jej realizacją $x_1, x_2, \ldots, x_n$; x_1 jest realizacją X_1 itd.*

Definicja 2. *Losową próbę prostą $X_1, X_2, \ldots, X_n$ będziemy nazywać losową próbą prostą z rozkładu normalnego, jeżeli zmienne X_k, $k = 1, 2, \ldots, n$ mają rozkład $N(\mu, \sigma)$ dla pewnych $\mu \in \mathbb{R}, \sigma > 0$.*

Uwaga 2. *W dalszym ciągu rozważań: „estymacja w modelu normalnym" będzie pojęciem równoważnym dla „wyznaczania estymatorów parametrów $\mu \in \mathbb{R}$ i $\sigma > 0$" na podstawie losowej próby prostej z rozkładu normalnego".*

Rozkład cen mieszkań
Można oczekiwać, że rozkład cen domów w dzielnicach które nie pretendują do miana „prestiżowych" czy „luksusowych" będzie zbliżony do normalnego $N(\mu, \sigma)$; (cena mieszkania jest wtedy sumą niezależnych składników).
Rozważmy dane dotyczące cen mieszkań w dzielnicy A
(dzielnica A jest zdecydowanie mniej prestiżowa niż B) — można założyć, że rozkład cen mieszkań w A będzie zbliżony do normalnego.

Średnia w próbie
Zakładamy, że nasze dane $x_1, \ldots, x_n$ są realizacją losowej próby prostej z rozkładu normalnego $X_1, \ldots, X_n$;
sensownym estymatorem μ jest $\bar{X} : \bar{X} = \frac{1}{n}(X_1, \ldots, X_n)$.
Dla konkretnej realizacji $x_1, \ldots, x_n$ losowej próby losowej $X_1, \ldots, X_n$ z rozkładu normalnego realizacja $\bar{X}$ jest oznaczana symbolem $\bar{x}$

Własności zmiennej losowej $\bar{X}$ w modelu normalnym
Zakładamy, że $X_1, \ldots, X_n$ są próbą prostą z rozkładu normalnego,

$$X_i \sim N(\mu, \sigma), i = 1, 2, \ldots, n.$$

$\bar{X} = \frac{1}{n}(X_1, \ldots, X_n)$ jest zmienną losową.
Funkcje próby prostej nazywane są *statystykami.*
Z własności wartości oczekiwanej, omawianych na jednym z poprzednich wykładów:

$$E(\bar{X}) = \mu,$$

a więc $\bar{X}$ jest nieobciążonym estymatorem μ. W modelu normalnym spełnia pewne istotne kryteria optymalności — w pewnym sensie jest najlepszym estymatorem nieobciążonym μ.

Estymacja σ i σ^2 w modelu normalnym
Wariancja z próby S^2 określona przez

$$\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$$

jest estymatorem nieobciążonym σ^2 w modelu normalnym, spełniającym pewne ważne kryteria optymalności; w pewnym sensie jest najlepszym estymatorem nieobciążonym σ^2.
Odchylenie standardowe z próby $S = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum(X_i - \bar{X})^2}$ jest sensownym estymatorem σ, ale nie ma (z reguły) własności nieobciążoności.

Przypadek, gdy próba pochodzi z rozkładu innego normalny
Załóżmy, że $X_1, X_2, \ldots, X_n$ pochodzi z rozkładu o wartości oczekiwanej μ i odchyleniu standardowym σ (niekoniecznie normalnego).
Można pokazać, że

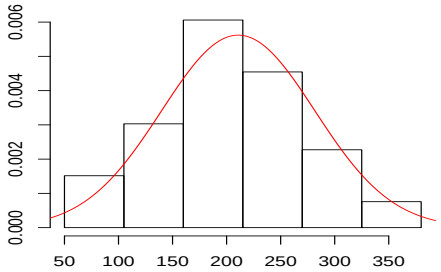
$$E\bar{X} = \mu, \quad E(S^2) = \sigma^2,$$

tj. że średnia z próby $\bar{X}$ jest nieobciążonym (niestronniczym) estymatorem μ i wariancja z próby S^2 jest nieobciążonym estymatorem σ^2 (por. Koronacki, Mielniczuk, Rozdz. 2.4).

Dane dotyczące cen mieszkań w A— histogram+krzywa normalna

Weryfikacja założenia o normalności rozkładu populacji
Dane są obserwacje $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Czy można założyć, że $x_1, x_2, \ldots, x_n$ jest realizacją próby prostej z rozkładu normalnego $N(\mu, \sigma)$ dla pewnych μ i σ?
Metody weryfikacji założenia o normalności:

- Sporządzenie histogramu i porównanie jego kształtu z krzywą dzwonową (wykresem funkcji ϕ.)



Rysunek 1: Histogram probabilistyczny+ wykres gęstości $N(\bar{x}, s)$.

- Sporządzenie wykresu ramkowego i odpowiednia jego interpretacja
- Sporządzenie wykresu kwantylowego i odpowiednia jego interpretacja.
- Testy zgodności: Shapiro–Wilka i inne.

Trzy z powyższych metod wykorzystują pojecie kwantyla.

Kwantyle rozkładu normalnego— przykład
Załóżmy, że Y, wzrost dorosłych mężczyzn w kraju A ma rozkład normalny $N(176, 8)$. Chcemy znaleźć liczbę d taką, że

$$P(Y < d) = 0{,}99.$$

Znajomość liczby d może być przydatna dla inżynierów sporządzających projekty budowlane itd.
Zadanie ogólniejsze: dla liczby $p \in (0, 1)$ kwantylem rzędu p rozkładu normalnego $N(\mu, \sigma)$ nazywamy liczbę q_p spełniającą równość:

$$P(X < q_p) = \int_{-\infty}^{q_p} \phi_{\mu,\sigma}(x)dx = p,$$

gdzie $X \sim N(\mu, \sigma)$. Dla innych rozkładów ciągłych– kwantyle definiujemy analogicznie.

Obliczanie kwantyli rozkładu normalnego
Korzystając z tablic rozkładu $N(0, 1)$: ponieważ

$$P(X < q_p) = P(Z < \frac{q_p - \mu}{\sigma}) = \Phi(\frac{q_p - \mu}{\sigma}),$$

gdzie $X \sim N(\mu, \sigma)$, $Z \sim N(0,1)$, więc zadanie sprowadza się do znalezienia przybliżonej wartości c_0 rozwiązania równania $\Phi(c) = p$ oraz do wyznaczenia przybliżonej wartości q_p jako rozwiązania równania:

$$\frac{x-\mu}{\sigma} = c_0.$$

Korzystając z R-a: należy użyć poleca **qnorm** z odpowiednimi parametrami; w Excelu: należy skorzystać z polecenia ROZKŁAD.NORMALNY.ODW.

Kwantyle rozkładu normalnego– przykład (c.d.)
Y, wzrost dorosłych mężczyzn w kraju A ma rozkład normalny $N(176, 8)$; Równanie $\Phi(c) = 0{,}99$ ma przybliżone rozwiązanie $c_0 = 2{,}33$ (bo $\Phi(2{,}32) \approx 0{,}9898$ i $\Phi(2{,}32) \approx 0{,}9901$); przybliżona wartość szukanego kwantyla jest rozwiązaniem równania:

$$\frac{x-176}{8} = 2{,}33$$

stąd przybliżona wartość kwantyla rzędu $0{,}99$ rozkładu $N(176, 8)$ wynosi $176 + 2{,}33 \times 8 = 194{,}64$.
Korzystając z R-a:

```
> qnorm(0.99,176,8)

[1] 194.6108
```

Wykres ramkowy i założenie normalności rozkładu
Można pokazać że poza przedziałem:

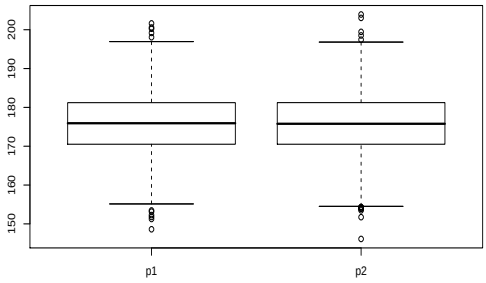
$$[q_{0{,}25} - 1{,}5 \times (q_{0{,}75} - q_{0{,}25}), q_{0{,}75} + 1{,}5 \times (q_{0{,}75} - q_{0{,}25})]$$

leży średnio 7 obserwacji na 1000, (jeśli zakładamy, że obserwacje te stanowią realizację próby prostej z rozkładu $N(\mu, \sigma)$ (por. książkę J. Koronackiego i J. Mielniczuka, par. 1.4.2). Zbyt duża liczba obserwacji odstających wskazuje na to, że założenie normalności rozkładu nie jest spełnione.
Jeśli obserwacje pochodzą z rozkładu normalnego, to odpowiadający im wykres ramkowy będzie w przybliżeniu symetryczny względem odcinka "wewnątrz ramki" (który odpowiada medianie).

Wykres kwantylowy
Uporządkowany ciąg obserwacji $x_1, \ldots, x_n$ oznaczamy przez $x_{1:n}, \ldots, x_{n:n}$. Niech

$$x'_{1:n} = \frac{x_{1:n} - m}{s}, \ldots, x'_{n:n} = \frac{x_{n:n} - m}{s},$$

gdzie m oznacza średnią z próby, a s odchylenie standardowe z próby. Jeśli założymy, że $x_1, \ldots, x_n$ pochodzą z rozkładu normalnego, to $x'_{1:n}, x'_{2:n}, \ldots$, powinny



Rysunek 2: Wykresy pudełkowe dla dwóch prób o liczności $n = 1000$, wygenerowanych przy pomocy generatora liczb pseudolosowych o rozkładzie $N(176, 8)$

być sensownymi przybliżeniami kwantyli $q_{1/n}, q_{2/n}, \ldots$ (rzędu $\frac{1}{n}$, rzędu $\frac{2}{n}$ itd.) rozkładu $N(0, 1)$; stąd punkty $(x'_{1:n}, q_{1/n}), (x'_{2:n}, q_{2/n})$ powinny się układać wokół (pewnej) prostej ; analogicznie punkty:

$$(x_{1:n}, q_{1/n}), (x_{2:n}, q_{2/n}), \ldots \tag{1}$$

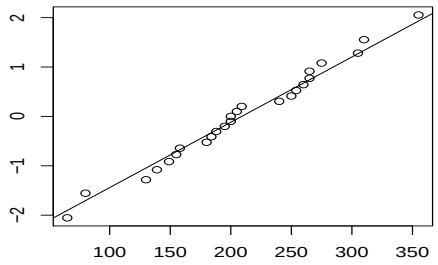
również powinny się układać wokół prostej.Wykres przedstawiający punkty (1) jest nazywany wykresem kwantylowym.
W praktyce zamiast kwantyli rzędu i/n wyznacza się np. kwantyle rzędu $i/(n+1)$; w ten sposób unikamy problemu z n-tym punktem!
Wykres kwantylowy „odbiegający od prostej": założenie o normalności rozkładu, z którego pochodzą $x_1, \ldots, x_n$, należy odrzucić.
Szczegóły dotyczące sprządzania rozkładu kwantylowego można znaleźć w [KM01,par.3.4.2].

Ceny mieszkań w A

Test Shapiro–Wilka i inne testy zgodności
Zgodność z rozkładem normalnym można weryfikować za pomocą testu Shapiro-Wilka; w wyniku obliczeń, wykonanych dla otrzymanych obserwacji, otrzymujemy tzw. p-wartość (ang. *p-value*); jeśli p-wartość jest mała, powiedzmy mniejsza niż $0{,}05$, wtedy są podstawy do odrzucenia hipotezy o normalności rozkładu, z którego pochodzą obserwacje.

Test Shapiro–Wilka: przykład obliczeń
W zmiennej y zapisane są wartości cen mieszkań w dzielnicy A.

```
> y
```



Rysunek 3: Wykres kwantylowy dla danych dotyczących cen mieszkań w A

```
 [1] 65  80 139 180 355 158 240 205 265 305 200
     155 209 310 149 254 188 265 275

[20] 200 184 130 260 250 195

> shapiro.test(y)

        Shapiro-Wilk normality test

data:  y
W = 0.9849, p-value = 0.962
```

p-wartość jest równa 0,962– nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy o zgodności z rozkładem normalnym.
Więcej informacji o teście Shapiro-Wilka; [KM01,par. 3.4.2]