Podstawowe pojęcia teorii testowania hipotez

dr Mariusz Grządziel

Wykład 8; 2 kwietnia 2012

Zadanie statystyki- wnioskowanie (uzyskanie informacji) o populacji generalnej na podstawie wylosowanej z niej próby; lub: wnioskowanie nt. parametrów zmiennych losowych odpowiadającym tej populacji.

Testowanie hipotezy o proporcji dla przypadku małej próby
Władze gminy A rozważają problem: czy gminie potrzebna jest nowa linia autobusowa, łącząca miasta i wioski tej gminy z północną częścią miasta W.
Obiegowa opinia sugeruje, że 50 procent mieszkańców gminy zainteresowanych jest korzystaniem z nowej linii.
Chcielibyśmy (w jakiś sposób) zweryfikować prawdziwość tej hipotezy.

Testowanie hipotezy o proporcji dla przypadku małej próby— c.d.
Chcemy zweryfikować hipotezę w oparciu o 12-elementową próbę z odpowiedziami TAK lub NIE na pytanie: *Czy uważasz za potrzebne utworzenie nowej linii autobusowej łączącej gminę A z północną częścią miasta W?*
Zakładamy, że odpowiedzi na te pytania są: (a) od siebie niezależne; (b) prawdopodobieństwo, że wybrany respondent odpowie na pytanie twierdząco jest równe p, gdzie $p \in (0, 1)$ jest nieznanym parametrem.
odpowiedzi na pytanie— 12-elementowy ciąg składający się z odpowiedzi negatywnych (kodowanych przez 0) i pozytywnych (kodowanych przez 1)- jest realizacją próby prostej z rozkładu $Bin(1, p)$.

Hipoteza zerowa i alternatywna
Zainteresowani jesteśmy weryfikacją hipotezy zerowej:

$$H_0 : p = 0{,}5$$

przeciwko hipotezie alternatywnej:

$$H_1 : p \neq 0{,}5.$$

Innymi sensownymi hipotezami alternatywnymi mogłyby być:

$$H_1' : p > 0{,}5 \text{ lub } H_1'' : p < 0{,}5.$$

Hipotezy H_1' i H_1'' odpowiadają wiedzy *a priori* dotyczącej badanej populacji (zmiennej losowej)—tj. temu, że na podstawie naszej intuicji (lub badań dokonywanych w przeszłości) jesteśmy pewni, że $p > 0{,}5$ ($p < 0{,}5$.)

Statystyka testowa i jej rozkład
Zakładamy prawdziwość H_0. Liczba osób, które odpowiedziały twierdząco na pytanie— zmienna losowa Y, $Y \sim Bin(12; 0{,}5)$. Y jest statystyką testową w naszym przykładzie.

k	0	1	2	3	4	5	6
$P(Y = k)$	0,0002	0,0029	0,0161	0,0537	0,1208	0,1933	0,2255

Prawdopodobieństwa $P(Y = k)$ dla $k > 6$ obliczamy korzystając z równości: $P(Y = k) = P(Y = 12 - k)$.
Problem: dla jakich wartości k są podstawy do odrzucenia H_0.
Dla hipotezy alternatywnej H_1 (dwustronnej) w grę wchodzą zbiory:

$$\{0, 12\}; \{0, 1, 11, 12\}, \{0, 1, 2, 10, 11, 12\}, \ldots$$

Konstrukcja obszaru krytycznego
Zbiór wartości k, dla których odrzucamy hipotezę zerową i przyjmujemy hipotezę alternatywną: obszar krytyczny.
Obszar krytyczny równy zbiorowi pustemu — nie do przyjęcia!

K	$P(Y \in K \vert H_0)$
$\{0, 12\}$	0,0004882813
$\{0, 1, 11, 12\}$	0,0063476563
$\{0, 1, 2, 10, 11, 12\}$	0,0385742188
$\{0, 1, 2, 3, 9, 10, 11, 12\}$	0,1459960938
$\{0, 1, 2, 3, 4, 8, 9, 10, 11, 12\}$	0,3876953125
$\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$	0,7744140625

$P(Y = k|H_0)$ oznacza prawdopodobieństwo zdarzenia $Y \in K$ pod warunkiem prawdziwości H_0.

Konstrukcja obszaru krytycznego— c.d.
Im większy jest obszar krytyczny K, tym większe jest prawdopodobieństwo odrzucenia H_0 gdy jest ona prawdziwa (tzw. *błędu 1-go rodzaju*) i tym mniejsze jest prawdopodobieństwo przyjęcia H_0, gdy jest ona fałszywa (tzw. *błędu 2-go rodzaju*).
Chcemy znaleźć złoty środek: szukamy największego obszaru krytycznego K takiego, że $P(Y \in K) \leq \alpha$; (α jest tzw. poziomem istotności testowania hipotezy). Zazwyczaj przyjmujemy, że $\alpha = 0{,}05$; czasem przyjmujemy $\alpha = 0{,}01$.
Obszar krytyczny dla $\alpha = 0{,}05 : K = \{0, 1, 2, 10, 11, 12\}$.
Obszar krytyczny dla $\alpha = 0{,}01 : K = \{0, 1, 11, 12\}$.

Uwagi nt. błędu 2-go rodzaju
Ustalmy naszą uwagę na przypadku, gdy poziom istotności $\alpha = 0{,}05$.
Załóżmy, że w wylosowanej próbie mamy 8 odpowiedzi TAK (i 4 NIE). Wartość statystyki Y jest równa 8.
Dla tej wartości Y nie podstaw do odrzucenia H_0; nie oznacza to, że przyjmujemy H_0!
Mamy inny stosunek do błedów pierwszego i drugiego rodzaju — zaproponowana procedura testowa *kontroluje błąd 1-go rodzaju.*

Pojęcie p-wartości
Dla ustalonej wartości statystyki testowej Y równej y można obliczyć prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że Y przyjmie wartość co najmniej tak oddaloną od 6 jak y

$$P(|Y - 6| \geq |y - 6|).$$

Dla danego y to prawdopodobieństwo będziemy nazywali p-wartością. (ang. *p-value*.) Np. dla $y = 8$ p-wartość jest równa 0,3877.

Obliczanie p-wartości
p-wartość można określić jako najmniejszy poziom istotności testowania hipotezy H_0 przeciw H_1, przy którym hipotezę H_0 jeszcze odrzucamy.
p-wartość jest obliczana przez pakiety statystyczne.
Mając podaną p-wartość można podjąć decyzję o odrzuceniu H_0.

Przykład obliczeń w środowisku R
Dla wartości $y = 10$ p-wartość — a także tzw. przedział ufności dla średniej— można obliczyć wydając polecenie binom.test z odpowiednimi parametrami:

```
>  binom.test(10, n=12, p = 0.5)

        Exact binomial test

data:  10 and 12
number of successes = 10,
number of trials =12,
p-value = 0.03857

alternative hypothesis:
true probability
of success is not equal to 0.5
95 percent confidence interval:
 0.51586 0.97914
sample estimates:
probability of success
               0.83333
```

p-wartość (p-value) jest równa 0,03857

Obszar krytyczny dla hipotez jednostronnych
Chcemy zweryfikować hipotezę

$$H_0 : p = 0{,}5 \text{ przeciw } H_1^{'} : p > 0{,}5.$$

W tym przypadku „kandydatami na obszar krytyczny” są:

$$\{12\}, \{11, 12\}, \{10, 11, 12\}, \{9, 10, 11, 12\}, \ldots.$$

Znajdujemy:

$$P(Y \in \{12\}) = 0{,}0002 \quad P(Y \in \{11, 12\}) = 0{,}0032$$
$$P(Y \in \{10, 11, 12\}) = 0{,}0192 \quad P(Y \in \{9, 10, 11, 12\}) = 0{,}07299.$$

obszarem krytycznym dla poziomu istotności $\alpha = 0{,}05$ jest $\{10, 11, 12\}$, a dla $\alpha = 0{,}01$ jest $\{11, 12\}$.

Polecana literatura
Łomnicki, A. Wprowadzenie do statystyki dla przyrodników. Wyd. 3. PWN, 2003, rozdział 4.