Testowanie hipotez w rodzinie rozkładów normalnych— przypadek znanego odchylenia standardowego

dr Mariusz Grządziel

Wykład 9; 16 kwietnia 2012

Przykład wprowadzający
Przykład X- średnica pewnego detalu stalowego wytwarzanego przez maszynę tokarską A.; Zakładamy (na podstawie wcześniejszych doświadczeń): $X \sim N(\theta; 0{,}1)$; (jednostka-milimetr);
Maszyna powinna produkować detale o szerokości średniej szerokości $\theta_0 = 7{,}5$.
Mamy uzasadnione podejrzenia, że maszyna, po wielu miesiącach użytkowania bez konserwacji, uległa rozregulowaniu i przeciętna wartość średnicy produkowanych detali jest w obecnym czasie większa niż 7,5.

Sformułowanie hipotezy zerowej i alternatywnej
Interesuje nas sprawdzenie hipotezy $H_0 : \theta = \theta_0$, gdzie $\theta_0 = 7{,}5$ (jednostka: milimetr.)
Chcemy sprawdzić, czy zużycie noża maszyny tokarskiej nie spowodowało zwiększenia wartości średnic θ. Stąd hipoteza alternatywna: $H_1 : \theta > \theta_0$.

Statystyka testowa i jej rozkład
Zakładamy, że nasze pomiary stanowią realizację próby prostej $X_1, X_2, \ldots, X_n$, gdzie $X_i \sim N(\theta; \sigma)$; w naszym przykładzie $\sigma = 0{,}1$.
Chcemy „procedurę testową" oprzeć na zmiennej losowej (tzw. *statystyce testowej*)

$$Z = \frac{\bar{X} - \theta_0}{\sigma/\sqrt{n}}.$$

Przy założeniu prawdziwości H_0 zmienna Z ma wartość oczekiwaną równą 0 — wynika to stąd, że wartość oczekiwana średniej próbkowej $\bar{X}$ jest równa θ_0. Można pokazać, że przy założeniu prawdziwości H_0 odchylenie standardowe Z jest równe 1.
Czy można precyzyjnie określić rozkład $\bar{X}$ oraz Z?

Rozkład średniej próbkowej

Twierdzenie 1. *Jeżeli $X_1, X_2, \ldots, X_n$ są niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie normalnym $N(\theta; \sigma)$ to średnia $\bar{X}$ ma rozkład $N(\theta; \sigma/\sqrt{n})$*

Wniosek:zmienna losowa Z określona przez

$$Z = \frac{\bar{X} - \theta_0}{\sigma/\sqrt{n}}.$$

ma rozkład $N(0, 1)$ przy założeniu prawdziwości H_0.

Obszar krytyczny
Problem: jakie wartości statystyki Z należy uznać za nietypowe?
Niech $z_{1-\alpha}$ oznacza kwantyl rzędu $1-\alpha$ rozkładu normalnego, tj. rozwiązanie równania:

$$\Phi(x) = 1-\alpha,$$

gdzie jest ustaloną liczbą z przedziału $(0,1)$ — zazwyczaj przyjmujemy w zagadnieniach testowania hipotez $\alpha = 0{,}05$ lub $\alpha = 0{,}01$; α jest tzw. poziomem istotności testowania hipotezy. Określmy zbiór krytyczny dla zadanego α dla hipotezy alternatywnej $H_1 : \theta = \theta_0$ przez:

$$C = \{z : z \geqslant z_{1-\alpha}\}.$$

Test dla weryfikacji H_0 przy alternatywie H_1: przyjmij H_0, gdy $Z \notin C$, odrzuć H_0, gdy $Z \in C$, z- wartość statystyki Z dla konkretnych danych.

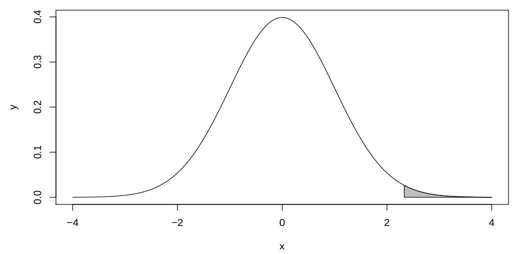
Przykład z detalami metalowymi— obliczenia
z -oznacza realizację statystyki testowej Z. $\bar{x}$ oznacza realizację statystyki $\bar{X}$ Dla $n = 50$ pomiarów $x_1, x_2, \dots, x_{50}$ otrzymaliśmy $\bar{x} = 7{,}515$; stąd

$$z = \frac{\bar{x}-\theta_0}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{7{,}515-7{,}5}{0{,}1/\sqrt{50}} \approx 1{,}06.$$

Dla poziomu istotności $\alpha = 0{,}01$ zbiór krytyczny C ma postać

$$[z_{0,99}, \infty) = [2{,}33; \infty),$$

a więc nie ma podstaw do odrzucenia H_0 i przyjęcia H_1.



Rysunek 1: Wykres gęstości rozkładu $N(0,1)$; pole zacieniowanego „trapezu krzywoliniowego” jest równe 0,01

Podstawa „nieskończonego trapezu”: $[2{,}33; \infty)$- to obszar krytyczny (w przykładzie "średnice detali metalowych”)

Uwagi nt. obliczania kwantyli r. normalnego

Definicja 1. *Kwantylem rzędu u, $u \in (0,1)$, rozkładu normalnego $N(0,1)$ bedziemy nazywać liczbę z_u spełniającą równość:*

$$\Phi(z_u) = u.$$

Kwantyle rozkładu normalnego $N(0,1)$ można obliczać „przeszukując” tablicę wartości funkcji Φ, odczytać z tablicy kwantyli lub obliczyć korzystając z odpowiedniego programu komputerowego— np. wydając polecenie qnorm w R-rze. Wartość $z_{0,99}$ można obliczyć w R-rze w następujący sposób:

```
> qnorm(0.99)

[1] 2.326348
```

Testowanie hipotezy o proporcji
Jeśli w naszym przykładzie hipotezę H_1 zastąpić przez hipotezę lewostronną $H_1^{'} : \theta < \theta_0$, to obszar krytyczny będzie miał postać:

$$(-\infty, z_\alpha],$$

w przypadku hipotezy alternatywnej 2-stronnej $H_1^{''} : \theta \neq \theta_0$, obszar krytyczny będzie miał postać:

$$(-\infty, z_{\alpha/2}] \cup [z_{1-\alpha/2}, \infty).$$

Testowanie hipotezy o proporcji
W państwie P w roku 2000 procent ludzi żyjących w ubóstwie (poverty rate- w skrócie PR) wynosił 11,3 a w 2008 roku: 12,7. Dane dotyczące 2000 roku są dokładne (pochodzą ze spisu powszechnego), dane dotyczące 2008 roku oparte są na rezultatach badań sondażowych, przeprowadzonych dla reprezentatywnej 10000-elementowej próby respondentów. Czy są podstawy aby sądzić, że PR istotnie wzrósł przez ostatnie 8 lat?

Testowanie hipotezy o proporcji- formalizacja problemu
Doświadczenie losowe polega na wyborze losowym mieszkańca P; jeśli ten mieszkaniec żyje w ubóstwie, wtedy wartość X jest równa 1, jeśli nie żyje w ubóstwie, wtedy wartość X wynosi 0.
Zakładamy, że odpowiedzi (dotyczące ubóstwa respondentów) otrzymane w 2008 roku stanowią realizację próby prostej z rozkładu $Bin(1,p)$.
Chcemy zweryfikować

$$H_0 : p = p_0 \text{ przeciw } H_1 : p > p_0;$$

w naszym przykładzie $p_0 = 11{,}3$.

Testowanie hipotezy o proporcji— c.d.
Niech Y- liczba żyjących w ubóstwie— spośród $n = 10000$ ankietowanych.
Zauważmy, że $Y = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$, gdzie $X_i \sim Bin(1,p)$
Z centralnego twierdzenia granicznego: przy założeniu prawdziwości H_0
$Y_1 = \frac{Y}{n} = \bar{X}$ ma w przybliżeniu rozkład $N\left(p_0, \sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}\right)$,
a statystyka testowa Z

$$Z = \frac{Y_1 - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}}$$

ma w przybliżeniu rozkład normalny $N(0,1)$.

Obszary krytyczne: lewostronny, prawostronny i dwustronny obliczamy tak jak w przypadku testowania hipotez w rodzinie rozkładów normalnych (gdy odchylenie standardowe jest znane).

Przykład „Procent ubóstwa w P"— c.d.
Przyjmujemy poziom istotności $\alpha = 0{,}05$. Obszar krytyczny— dla hipotezy prawostronnej $H_1 : p > p_0 = 0{,}113$ ma postać: $[z_{0.95}, \infty) = [1{,}644854, \infty)$.
Wartość statystyki testowej Z dla naszych danych jest równa 4.422084 Można ją obliczyć w R-rze następująco:

```
> (0.127-0.113)/(sqrt((0.113*(1-0.113))/10000))
[1] 4.422084
```

a więc są podstawy, aby odrzucić H_0 i przyjąć H_1.