1. Uzasadnij, że dla dowolnego $\alpha \in (0,1)$ kwantyle rozkładu normalnego z_α i $z_{1-\alpha}$ spełniają zależność:

$$z_\alpha + z_{1-\alpha} = 0.$$

2. Oblicz następujące kwantyle rozkładu normalnego: (a) $z_{0,5}$; (b) $z_{0,95}$; (c) $z_{0,975}$ (d) $z_{0,05}$.

3. W państwie S w roku 2000 procent ludzi żyjących w ubóstwie (poverty rate- w skrócie PR) wynosił $p_0 = (10 + \frac{a}{10})\%$ a w 2009 roku: $p_1 = (12 + \frac{b}{10})\%$, (gdzie a— liczba liter w Twoim imieniu, b — liczba liter w Twoim nazwisku).

   Np. student o imieniu Jan i nazwisku Nowak powinien przyjąć: $p_0 = 10{,}3\% = 0{,}103$ i $p_1 = 12{,}5\% = 0{,}125$. Natomiast studentka o imieniu Maria i nazwisku Nowicka powinna przyjąć $p_0 = 10{,}5\% = 0{,}105$ i $p_1 = 12{,}7\% = 0{,}127$.

   Dane dotyczące 2000 roku są dokładne (pochodzą ze spisu powszechnego), dane dotyczące 2009 roku oparte są na rezultatach badań sondażowych, przeprowadzonych dla reprezentatywnej 2500-elementowej próby respondentów.

   (a) sformułować hipotezę zerową $H_0 : p = p_0$ i hipotezę alternatywną $H_1 : p > p_0$. Zweryfikować je przyjmując poziom istotności $\alpha = 0{,}05$.

   (b) oblicz $P(Z > z)$ przy założeniu prawdziwości hipotezy H_0 (p-wartość odpowiadającą wartości statystyki testowej Z równej

   $$z = \frac{p_1 - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}}$$

   oraz hipotezom: H_0 i H_1). Skorzystaj z faktu, że Z ma w przybliżeniu rozkład normalny z odpowiednimi parametrami.

   (c) sformułować hipotezę zerową $H_0 : p = p_0$ i hipotezę alternatywną $H_1' : p \neq p_0$. Zweryfikować je przyjmując poziom istotności $\alpha = 0{,}01$.

   Uwaga. W zadaniu należy zastosować test dla proporcji, w którym rozkład statystyki testowej „przybliżamy” rozkładem normalnym.

4. Niech $Y = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$, gdzie $X_i \sim Bin(1,p)$, $n \in \mathbb{N}$, $p \in (0,1)$, a $Y_1 = \frac{Y}{n}$ (Y_1 oznacza „proporcję”). Uzasadnij, że statystyka

   $$Z = \frac{Y_1 - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}}$$

   ma w przybliżeniu rozkład normalny $N(0,1)$ przy założeniu, że $p = p_0$.

5. Oblicz następujące kwantyle rozkładu t-Studenta: (a) $t_{0,9;10}$; (b) $t_{0,95;12}$; (c) $t_{0,975;6}$.

6. Cena metra kwadratowego (w tys. zł) z dla 15 losowo wybranych mieszkań w mieście A (dane pochodzą z kwietnia 2006):

   $$3{,}75; 3{,}89; 5{,}09; 3{,}77; 3{,}53; 2{,}82; 3{,}16; 2{,}79; 4{,}34; 3{,}61; 4{,}31; 3{,}31; 2{,}50; 3{,}27; 3{,}05.$$

   W prasie podano informację, że średnia cena metra kwadratowego mieszkań w A w 2004 roku wynosiła 2800 zł. Czy powyższe dane potwierdzają obiegową opinię, że ceny mieszkań istotnie wzrosły od 2004 roku— zweryfikuj tę hipotezę przyjmując poziom istotności $\alpha = 0{,}01$. Zakładamy, że analizowane dane stanowią próbę prostą z rozkładu normalnego $N(\mu, \sigma)$.

   Wskazówka. Należy zweryfikować

   $$H_0 : \mu = 2800 \text{ przeciw } H_1' : \mu > 2800$$

7. Funkcja Γ jest określona wzorem

   $$\Gamma(t) = \int_0^\infty x^{t-1} e^{-x} dx, \quad t > 0;$$

   (a) uzasadnij, że $\Gamma(t) > 0$ dla $t > 0$.

   (b) sprawdź, że $\Gamma(1) = 1$;

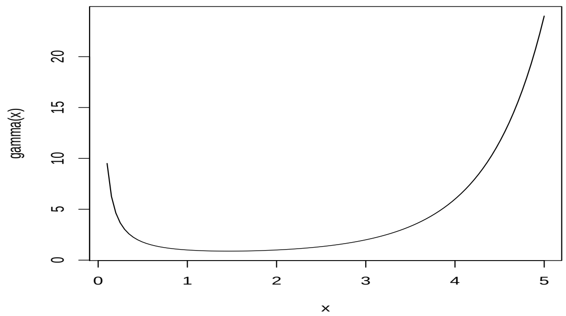
   (c) całkując przez części wykaż, że $\Gamma(t+1) = t\Gamma(t)$ dla $t > 0$.

8. Gęstość rozkładu t-Studenta z n stopniami swobody określona jest wzorem

   $$t(x) = \frac{\Gamma((n+1)/2)}{\Gamma(n/2)\sqrt{\pi n}} \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-(n+1)/2}.$$

   Uzasadnij, że funkcja t jest (a) dodatnia na $\mathbb{R}$; (b) parzysta.

9. Uzasadnij, że $t_{\alpha;n} = t_{1-\alpha;n}$ dla $\alpha \in (0; 0{,}5)$, $n \in \mathbb{N}$.



Rysunek 1: Wykres funkcji Γ na $[0{,}1; 5]$.

10. Cena metra kwadratowego (w tys. zł) z dla 14 losowo wybranych mieszkań w mieście A:

$$3{,}75; 3{,}89; 5{,}09; 3{,}77; 3{,}53; 2{,}82; 3{,}16; 2{,}79; 4{,}34; 3{,}61; 4{,}31; 3{,}31; 2{,}50; 3{,}27.$$

Zakładamy, że dane te są realizacją próby prostej z rozkładu $N(\mu, \sigma)$.

Znajdź 90-procentowy przedział ufności (dokładniej: jego realizację) dla μ.

11. W państwie P w roku 2004 proprorcja p ludzi żyjących w ubóstwie (poverty rate- w skrócie PR) wynosił 13 procent ; dane pochodzą z badań sondażowych, przeprowadzonych dla reprezentatywnej 1000-elementowej próby respondentów. Znajdź:

   (a) 95-procentowym przedziałem ufności dla p;

   (b) 95-procentowym przedziałem ufności dla p.

12. Znajdź w prasie lub w Internecie informacje o wynikach badań sondażowych, w których podany jest „margines błędu". Czy są podstawy, aby uznać, że w tych notatkach prasowych „margines błędu" oznacza 95-procentowy przedział ufności dla proporcji?

13. Dwóm grupom robotników zlecono wykonanie tej samej pracy. Zaobserwowano wydajności (w szt./h):

$$18{,}6; 17{,}9; 18{,}1; 17{,}0; 18{,}7; 18{,}3 \text{ (pierwsza grupa)}$$
$$17{,}3; 17{,}6; 17{,}1; 16{,}0; 17{,}8 \text{ (druga grupa)}$$

Robotnicy z pierwszej grupy przeszli wcześniej odpowiednie przeszkolenie, robotnicy z drugiej grupy nie.

Zakładamy, że pomiary dla pierwszej grupy stanowią realizację próby prostej z $N(\mu_1, \sigma_1)$ a pomiary dla grupy drugiej stanowią realizację próby prostej z $N(\mu_2, \sigma_2)$.

Na poziomie istotności $\alpha = 0{,}01$ zweryfikuj hipotezę

$$H_0: \text{ średnia wydajność nie zależy od przeszkolenia}$$

przeciw

$$H_1: \text{ średnia wydajność zależy od przeszkolenia.}$$

Wskazówka. Sprawdź (uzywając odpowiedniego testu), że nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy o jednorodności wariancji

$$H_0^j : \sigma_1^2 = \sigma_2^2 \text{ przeciwko } H_1^j : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2.$$

a następnie użyj odpowiedniej wersji testu t.

14. Gestość rozkładu F_{n_1,n_2} dana jest wzorem:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\Gamma((n_1+n_2)/2)}{\Gamma(n_1/2)\Gamma(n_2/2)} \left(\dfrac{n_1}{n_2}\right)^{n_1/2} x^{n_1/2-1} \left(1 + \dfrac{n_1}{n_2}x\right)^{-(n_1+n_2)/2}, & \text{gdy } x > 0, \\ 0, & \text{gdy } x \leqslant 0. \end{cases}$$

   (a) Uzasadnij, że funkcja f jest nieujemna;

   (b) Znajdź granicę $f(x)$ przy x dążącym do nieskończoności.

Mariusz Grządziel