

Wykład 3. Podstawowe pojęcia rachunku prawdopodobieństwa

dr Mariusz Grządziel

20 lutego 2012

Populacja i próba

Populacja- zbiorowość skończona lub nieskończona, w stosunku do której mają być formułowane wnioski.
Próba- skończony podzbiór populacji podlegający szczegółowemu badaniu.

Doświadczenie losowe

Losowo wybrana próba z populacji— odpowiada doświadczeniu losowemu.
Doświadczenie nazywamy losowym, jeśli:

- może być powtarzane (w zasadzie) w tych samych warunkach;
- wynik jego nie może być przewidziany w sposób pewny;
- zbiór wszystkich możliwych wyników doświadczenia jest określony przed przeprowadzeniem doświadczenia.

Przykłady doświadczeń losowych

Cena mieszkania losowo wybranego z listy mieszkań oferowanych do sprzedaży; Czas bezawaryjnej pracy lodówki marki X; Przynależność wyznaniowa losowo wybranego mieszkańca Warszawy; Rezultat dwukrotnego rzutu monetą.

Przestrzeń zdarzeń elementarnych

Definicja 1. Przestrzenią zdarzeń elementarnych nazywamy zbiór wszystkich możliwych wyników doświadczenia losowego. Pojedynczy element tej przestrzeni nazywać będziemy zdarzeniem elementarnym.

Dowolny podzbiór przestrzeni zdarzeń elementarnych o skończonej liczbie elementów będziemy nazywać zdarzeniem. W przypadku przestrzeni zdarzeń elementarnych o nieskończonej liczbie elementów, zdarzeniem nazywamy podzbiór przestrzeni zdarzeń elementarnych spełniający pewne dodatkowe założenia.

Uwaga Niektórzy autorzy określają zdarzenie jako dowolny podzbiór przestrzeni zdarzeń elementarnych (jest to sensowne uproszczenie — dla celów dydaktycznych).

Przestrzeń zdarzeń elementarnych- przykłady

Przestrzenią zdarzeń elementarnych dla doświadczenia losowego :

- polegającego na losowym wyborze mieszkania, oferowanego do sprzedaży, i podaniu jego ceny jest $[0, \infty)$;
- polegającego na dwukrotnym rzucie monetą jest $\{OO, OR, RO, RR\}$; zapis OO oznacza: orzeł wypadł w pierwszym i drugim rzucie itd.;
- polegającego na dwukrotnym rzucie kostką jest $\{(1, 1), (1, 2), \dots, (6, 5), (6, 6)\}$.

Czym jest prawdopodobieństwo

Podejście częstościowe: rzucając monetą (uczciwą) N razy otrzymujemy n orłów— można oczekiwać, że n/N będzie dążyć do $1/2$ gdy $N \rightarrow \infty$

Podejście aksjomatyczne: każdemu zdarzeniu A , będącemu podzbiorem przestrzeni zdarzeń elementarnych \mathcal{S} przyporządkujemy liczbę $P(A)$, spełniającą warunki:

- $0 \leq P(A) \leq 1$;
- gdy $A = \emptyset$, $P(A) = 0$;
- gdy $A = \mathcal{S}$, $P(A) = 1$;
- Jeśli zdarzenia A_1, A_2, A_3, \dots się wzajemnie wykluczają (tj. $A_i \cap A_j = \emptyset$ dla $i \neq j$) i suma $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots$ jest zdarzeniem, to

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + \dots$$

Prawdopodobieństwo— przykład

Rzucamy dwukrotnie kostką. Jakie jest prawdopodobieństwo, że suma oczek będzie mniejsza lub równa 3.

W naszym przypadku $\mathcal{S} = \{(1, 1), (1, 2), \dots, (6, 5), (6, 6)\}$; przyjmujemy, że prawdopodobieństwo wszystkich zdarzeń elementarnych jest równe $\frac{1}{6 \times 6} = \frac{1}{36}$. Zdarzenie A , odpowiadające wyrzuceniu nie więcej niż 3 oczek, ma postać: $A = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1)\}$. Stąd $P(A) = 3 \times \frac{1}{36} = \frac{1}{12}$.

Założenie o jednakowym prawdopodobieństwie zdarzeń elementarnych

Uwaga. Z formalnego punktu widzenia moglibyśmy przyjąć w rozważanym przykładzie np.

$$P((1, 1)) = P((1, 2)) = \frac{1}{2}, \quad P((1, 3)) = P((1, 4)) = \dots = P((6, 6)) = 0,$$

lecz otrzymany w ten sposób model matematyczny nie będzie „sensownie” opisywał naszego doświadczenia losowego.

Niezależność zdarzeń

Niezależność zdarzeń wiążemy z brakiem zależności przyczynowo- skutkowej. Można uznać za niezależne:

- wyniki kolejnych rzutów kostką;
- ustanowienie rekordu świata w skoku w dal na najbliższej olimpiadzie i utworzenie nowego województwa do końca bieżącego roku

Definicja 2. Mówimy, że zdarzenia A i B są niezależne, jeżeli

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B).$$

Niezależność dla więcej niż dwóch zdarzeń— patrz [KM01], Definicja 2.7.

Niezależność zdarzeń— przykłady

W przykładzie z rzutem dwoma kostkami: zdarzenie A — „wynik pierwszego rzutu jest równy jeden” i zdarzenie B — „wynik drugiego rzutu jest równy 5” są niezależne, gdyż

$$P(A) = P(B) = \frac{1}{6} \text{ oraz } P(A \cap B) = P((1, 5)) = \frac{1}{36}.$$

Pojęcie zmiennej losowej

Nieformalne określenie— wynik liczbowy doświadczenia losowego.

Przykładami zmiennej losowej są: suma oczek otrzymanych po dwukrotnym rzucie kostką; cena losowo wybranego mieszkania (z listy mieszkań oferowanych do sprzedaży); temperatura człowieka, zmierzona w losowo wybranej chwili. Precyzyjne określenie zmiennej losowej-przypadek, gdy przestrzeń zdarzeń elementarnych jest skończona: funkcja określona na przestrzeni zdarzeń elementarnych.

Zmienna losowa— przykład

Rzucamy dwukrotnie kostką. Niech X — suma oczek; X — przykład zmiennej losowej. X przyjmuje wartości 2, 3, ..., 11, 12 z prawdopodobieństwami:

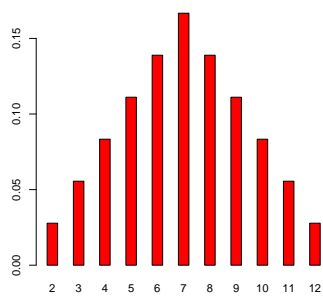
k	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P(X = k)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

Funkcja przyporządkowująca $k \in \{2, 3, \dots, 11, 12\}$ prawdopodobieństwo $P(X = k)$ — rozkład zmiennej X . Notacja: $X = k$ —zbiór zdarzeń elementarnych ω takich, że $X(\omega) = k$. Analogicznie: $X < k$ —zbiór zdarzeń elementarnych ω takich, że $X(\omega) < k$.

Lektura uzupełniająca

T. Bednarski, Elementy matematyki w naukach ekonomicznych. Oficyna ekonomiczna. Kraków 2004, str. 218–228 [zwracam uwagę na różnicę pomiędzy pojęciami próby losowej, zdefiniowanej na str. 221, a pojęciem próby, zdefiniowanym podczas dzisiejszego wykładu!]

Koronacki, J., Mielniczuk, J. Statystyka dla studentów kierunków technicznych i przyrodniczych. WNT. Warszawa 2001, podrozdział 2.1.2, str. 62-79.



Rysunek 1: Wykres słupkowy przedstawiający rozkład zmiennej losowej X , sumy oczek otrzymanych w dwukrotnym rzucie kostką