

1. Dla wektorów $x = (1, 2, 3, 4)'$ i $y = (2, 3, 4, 5)'$ oblicz:

- (a) iloczyn skalarny $\langle x, y \rangle$;
- (b) odległość w metryce euklidesowej $d_E(x, y)$.

2. Wykonaj działania na macierzach:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

3. Uzasadnij, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x i y zachodzi równość:

$$\begin{bmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos y & -\sin y \\ \sin y & \cos y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(x+y) & -\sin(x+y) \\ \sin(x+y) & \cos(x+y) \end{bmatrix}.$$

Podaj interpretację geometryczną tej równości.

4. Znajdź rozwiązania następujących układów równań:

(a)

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 &= 6 \\ 3x_1 - 3x_2 &= -2 \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 &= 6 \\ 3x_1 - 3x_2 &= -2 \end{aligned}$$

5. Znajdź macierze odwrotne dla następujących macierzy (tam, gdzie jest to możliwe):

(a)

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

(b)

$$R_x = \begin{bmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{bmatrix}.$$

gdzie x jest dowolnie ustaloną liczbą rzeczywistą (R_x jest macierzą obrotu o kąt x).

(c)

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

6. Uzasadnij, że macierz odwrotna do macierzy diagonalnej

$$D = \text{diag}(d_1, d_2, d_3)$$

jest równa $\text{diag}(1/d_1, 1/d_2, 1/d_3)$. Zakładamy, że d_1, d_2 i d_3 są różne od zera.

7. Dla liczby a i macierzy wymiaru $m \times n$ A macierz aA ma elementy aa_{ij} , $i = 1, \dots, m$; $j = 1, \dots, n$. Iloczyn dwóch macierzy kwadratowych B będziemy oznaczać przez B^2 . Analogicznie można zdefiniować wyższe potęgi macierzy B , na przykład $B^3 = B^2 B$.

(a) Wyznacz macierz odwrotną do macierzy

$$B = \text{diag}(1, 2, 3) + 2I_3.$$

(b) Dla $C = \text{diag}(2, 3)$ oblicz $C^3 - 2C$ oraz $C^2 + 3C$.

8. Niech będzie dana macierz $A = (a_{ij})$ wymiaru $m \times n$.

Uzasadnij, że dla dowolnych macierzy A i B tego samego wymiaru:

(a) $(A + B)' = A' + B'$;

(b) $(AB)' = B' A'$.

9. Dla macierzy

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

oblicz iloczyn

$$A \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix},$$

gdzie x i y są pewnymi, ustalonymi liczbami rzeczywistymi. Jaką interpretację geometryczną można byłoby zaproponować dla macierzy A ?

10. Macierz kwadratową Q będziemy nazywać ortogonalną, jeżeli

$$Q'Q = QQ' = I_n,$$

gdzie n oznacza stopień macierzy Q . Uzasadnij, że macierz obrotu R_x (zdefiniowana w zadaniu podpunkcie b) zadania 1-go) jest macierzą ortogonalną dla dowolnej liczby rzeczywistej x . Czy istnieje macierz ortogonalna stopnia drugiego nie będąca macierzą obrotu (której nie jest równa R_x dla pewnego x)?

Mariusz Grzędziel