

1. Wiadomo, że liczba $\sqrt{2}$ jest niewymierna, tj. nie istnieją liczby całkowite p i q takie, że

$$\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2.$$

Dowód tego faktu można znaleźć np. w Wikipedii:

http://pl.wikipedia.org/wiki/Dowód_niewymierności_pierwiastka_z_2

Korzystając z powyższego faktu uzasadnij, że $1 + \sqrt{2}$ jest również liczbą niewymierną.

2. Oblicz:

(a) $\sum_{i=1}^{10} i$;

(b) $\sum_{i=1}^{10} 2^i$;

(c) $\sum_{k=1}^5 k!$

3. Czy prawdziwe są nierówności:

(a)

$$\sum_{i=0}^9 2^i \leq 1000;$$

(b)

$$\sum_{i=1}^n 2^{-i} \leq 1, \text{ gdzie } n \text{ jest dowolną liczbą naturalną};$$

(c)

$$\sum_{i=1}^{20} i \leq 200.$$

4. Dla danych $a, b \in \mathbb{R}$ funkcję liniową f definiujemy wzorem

$$f(x) = ax + b. \quad (1)$$

Współczynnik a nazywamy współczynnikiem kierunkowym prostej, współczynnik b nazywamy wyrazem wolnym.

- (a) Dla jakich wartości parametru a funkcja f jest:

- rosnąca;
- malejąca;
- stała.

- (b) Znajdź równanie prostej przechodzącej przez punkty $(1, 1)$ i $(2, 0)$.

Uwaga. Równanie prostej ma postać $y = f(x) = ax + b$; zadanie więc sprowadza się do wyznaczenia parametrów a i b .

- (c) Prędkość przedmiotu upuszczonego z wieży o wysokości 50 metrów dana jest wzorem:

$$v(t) = gt.$$

Przyjmujemy, że $g = 10 \left[\frac{m}{s^2} \right]$.

Oblicz prędkość przedmiotu w chwili:

- $t = 1$;
- $t = 2$.

W jakim momencie (dla jakiej wartości t_0 zmiennej t) przedmiot uderzy o powierzchnię ziemi?

- (d) Znajdź zależność drogi przebytej przez upuszczony przedmiot od czasu „na odcinku czasowym” $[0, t_0]$;
- (e) Znajdź zależność drogi przebytej przez upuszczony przedmiot od czasu „na przedziale czasowym” $[-\infty, \infty]$; zakładamy, że przed upuszczeniem z wieży oraz po dotknięciu powierzchni ziemi przedmiot jest nieruchomy.
5. Funkcję wykładniczą określamy wzorem $f(x) = a^x$; zakładamy, że podstawa a jest liczbą dodatnią różną od jeden (co można zapisać zwięźle: $1 \neq a > 0$).
- (a) Dla jakich wartości argumentu x wzór definiujący funkcję f ma sens? (Zbiór argumentów, dla których wzór definiujący funkcję f ma sens będziemy nazywać dziedziną naturalną funkcji f).
- (b) Dla jakich wartości podstawy a funkcja f jest rosnąca? Dla jakich malejąca?
- (c) Jaka zależność łączy a^x , a^y i a^{x+y} , gdzie $0 < a \neq 1$ oraz x i y są dowolnymi liczbami rzeczywistymi?
6. Funkcję logarytmiczną określamy wzorem $f(x) = \log_a x$, gdzie $1 \neq a > 0$.
- (a) Wyznacz dziedzinę naturalną funkcji f .
- (b) Dla jakich wartości podstawy a funkcja f jest rosnąca? Dla jakich malejąca?
- (c) Jaka zależność łączy $\log_a x$, $\log_a y$ i $\log_a xy$, gdzie $0 < a \neq 1$ oraz x i y są dowolnymi liczbami rzeczywistymi dodatnimi?
7. Podaj definicję i funkcji trygonometrycznych: sinus i cosinus. Czy istnieje przedział, na którym zarówno sinus jak i cosinus są funkcjami malejącymi?

Uwaga. W literaturze można spotkać kilka różnych definicji funkcji trygonometrycznych, por.

http://pl.wikipedia.org/wiki/Funkcje_trygonometryczne

Dla naszych rozważań najbardziej przydatna będzie definicja, w której odwołujemy się do pojęcia okręgu jednostkowego („definicja na okręgu jednostkowym”).

Mariusz Grządziel