

1. Zenek podczas zawodów biegnie z prędkością

$$v_Z(t) = 8e^{-0,02t} [m/sec], \quad t \geq 0.$$

Znajdź przyspieszenie Zenka w chwili  $t = 50$ .

2. Załóżmy, że na początku eksperymentu liczebność kultury bakterii  $P(0)$  jest równa 10000. Przyjmujemy, że liczebność bakterii podwaja się po upływie 15 minut oraz że wzrost populacji jest wykładniczy:

$$\begin{aligned} P(t+15) &= 2P(t), \quad t \geq 0, \\ P(t) &= 10000a^t = 10000e^{\ln at} = 10000e^{bt}, \end{aligned}$$

gdzie  $1 \neq a > 0$  i  $b = \ln a$ . Chcemy znaleźć:

- prędkość zmiany liczebności bakterii dla  $t = 15$  i  $t = 40$  (jednostką pomiaru czasu jest minuta);
  - liczebność populacji dla wartości zmiennej  $t$  z podpunktu (a).
3. Jesteśmy zainteresowani znalezieniem zależności pomiędzy masą atomów izotopu potasu  $K-43$  a czasem, który upłynął od początku eksperymentu. Masa początkowa tej substancji wynosi  $R(0) = 30mg$ , czas połowicznego rozpadu 20h. Liczba atomów promieniotwórczego potasu maleje wykładniczo:

$$R(t) = 30e^{-kt}.$$

Chcemy znaleźć prędkość rozpadu po 5, 10 i 18 godzinach.

4. Znajdź pochodne funkcji:

- $f_1(x) = 2^x - 3^x$  na przedziale  $I = (-\infty, \infty)$ ;
- $f_2(x) = \frac{2^x - 3^x}{2^x + 3^x}$  na przedziale  $I = (-\infty, \infty)$ ;
- $f_3(x) = x \ln x$  na przedziale  $I = (0, \infty)$ ;
- $f_4(x) = \ln(x-1)$  na przedziale  $I = (1, \infty)$ ;
- $f_5(x) = (2+x)^6$  na przedziale  $I = \mathbb{R}$ ;
- $f_6(x) = e^{-x^2} + \ln x$  na przedziale  $I = (0, \infty)$ .

5. Po zastosowaniu zastrzyku domięśniowego, stężenie lekarstwa w krwiobiegu pacjenta po czasie  $t$  określone jest wzorem

$$C(t) = \frac{0,2t}{t^2 + 4t + 4}, \quad 0 \leq t \leq 10.$$

Oblicz wartość argumentu  $t_0$ , dla którego stężenie jest maksymalne. Określ przedziały, na których funkcja  $C$  jest monotoniczna.

6. Po zastosowaniu zastrzyku domięśniowego, stężenie penicyliny w krwiobiegu pacjenta po czasie  $t$  określone jest wzorem

$$C(t) = 6e^{-0,2t} - 6e^{-0,3t} \quad \left[ \frac{\mu g}{\mu l} \right].$$

Czas  $t$  jest wyrażony w godzinach. Oblicz wartość argumentu  $t_0$ , dla którego stężenie jest maksymalne. Określ przedziały, na których funkcja  $C$  jest monotoniczna.

**Uwaga** Zadanie nawiązuje do przykładu 8.1.2 z książki:

T.L. Cornette i Ralph A. Ackerman, *Calculus for the Life Sciences: A Modeling Approach*, t.1. Rozdział 8-my tego podręcznika można pobrać ze strony:

[http://cornette.public.iastate.edu/V\\_I\\_08\\_der\\_appl.pdf](http://cornette.public.iastate.edu/V_I_08_der_appl.pdf)

7. Określ przedział, na którym funkcja  $f$  dana wzorem

$$f(x) = e^{-bx}x,$$

gdzie  $b$  jest ustaloną liczbą dodatnią, jest rosnąca.

**Uwaga** Funkcja  $f$  może być zastosowana do opisu stężenia lektuwa krwiobiegu w zależności od czasu, por. Przykład 8.1.3 w rozdziale ósmym cytowanego wyżej podręcznika Cornette'a i Ackermana.

8. Napisz równania stycznych do wykresów podanych funkcji we wskazanych punktach:

(a)  $f(x) = e^x$ ,  $(0, 1)$ ;

(b)  $f(x) = \frac{1}{x}$ ,  $(2, \frac{1}{2})$ .

Sporządź odpowiednie rysunki.

9. Znajdź drugą pochodną funkcji

(a)  $f_1(x) = x^3$  na przedziale  $\mathbf{I} = \mathbb{R}$ ;

(b)  $f_2(x) = e^x + x$  na przedziale  $\mathbf{I} = \mathbb{R}$ .

Uzasadnij, że funkcje te są wypukłe na wskazanych przedziałach.

10. Uzasadnij, że funkcja  $\phi_{\mu,\sigma}$  dana wzorem

$$\phi_{\mu,\sigma}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right],$$

gdzie  $\mu \in \mathbb{R}$ ,  $\sigma \in (0, \infty)$ ,

(a) jest rosnąca na  $(-\infty, \mu)$ ;

(b) jest malejąca na  $(\mu, \infty)$ ;

(c) ma maksimum lokalne (i globalne) w punkcie  $x = \mu$ ;

(d) jest wypukła na przedziałach  $(-\infty, \mu - \sigma)$ ; i  $(\mu + \sigma, \infty)$ ;

(e) jest wklęsła na przedziale  $(\mu - \sigma, \mu + \sigma)$ ;

(f) ma punkty przegięcia:  $(\mu - \sigma, \phi_{\mu,\sigma}(\mu - \sigma))$  i  $(\mu + \sigma, \phi_{\mu,\sigma}(\mu + \sigma))$ .

Naszkicuj wykres funkcji  $\phi_{\mu,\sigma}$  dla  $\mu = 2$  i  $\sigma = 1$ .

*Mariusz Grządziel*