

17. Autobus linii R odjeżdża z pewnego przystanku co pół godziny. Czas oczekiwania Y na ten autobus (przez pasażera, który nie zna rozkładu jazdy i przychodzi w „losowym” momencie na przystanek), ma rozkład jednostajny $U(0; 0,5)$; jest to rozkład ciągły, którego funkcja gęstości ma postać:

$$v(x) = \begin{cases} 2, & \text{jeśli } 0 \leq x \leq \frac{1}{2}, \\ 0 & \text{jeśli } x < 0 \text{ lub } x > \frac{1}{2}. \end{cases}$$

- (a) oblicz $P(\frac{1}{4} < Y < \frac{1}{2})$ — tj. prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że czas oczekiwania będzie dłuższy niż $\frac{1}{4}$ godziny i krótszy niż $\frac{1}{2}$ godziny;
(b) oblicz wartość oczekiwaną i wariancję zmiennej Y ;
(c) znajdź postać dystrybuanty zmiennej losowej Y .
18. Dla jakiej wartości parametru c funkcja h określona wzorem:

$$h(x) = \begin{cases} cx, & \text{jeśli } 0 \leq x \leq 1, \\ 2c - cx, & \text{jeśli } 1 < x \leq 2, \\ 0, & \text{jeśli } x < 0 \text{ lub } x > 2, \end{cases}$$

jest gęstością (pewnej zmiennej losowej)?

19. Oblicz wartość oczekiwaną zmiennej losowej typu ciągłego W z funkcją gęstości h (z odpowiednio dobraną stałą c — por. poprzednie zadanie).
20. Zakładamy, że Y , wzrost dorosłych mężczyzn w mieście C jest zmienną losową o rozkładzie $N(175, 8)$. Oblicz:
- (a) $P(Y > 175)$;
(b) $P(Y < 179)$;
(c) $P(X < 171)$;
(d) $P(167 < X < 179)$.

Uwaga: Odnosnik do odpowiednich tablic statystycznych można znaleźć na stronie wykładu.

21. Uzasadnij, że dla zmiennej losowej X o rozkładzie normalnym $N(\mu, \sigma)$ prawdziwe są przybliżone równości:
- (a) $P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0,9545$;
(b) $P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0,9973$ („prawo trzech sigm”).
22. Korzystając z centralnego twierdzenia granicznego uzasadnij, że suma wydatków 20 kolejnych klientów w sklepie ma rozkład zbliżony do normalnego.
23. Naskicuj na jednym rysunku trapezy krzywoliniowe ograniczone:
- wykresem funkcji $y = \phi(x)$ oraz prostymi: $y = 0$, $x = -1$ i $x = 0,5$;
 - wykresem funkcji $y = \phi_{1,2}(x)$ oraz prostymi $y = 0$, $x = -1$ i $x = 2$.

Uzasadnij (na dwa sposoby), że pola tych trapezów krzywoliniowych są równe:

- (a) korzystając z odpowiedniego wzoru podanego na stronie 3-ciej notatek z wykładu 13-go z poprzedniego semestru;
(b) odwołując się do intuicji geometrycznych: drugi z trapezów można otrzymać z pierwszego wykonując odpowiednie przekształcenie.

Uwaga Szkicowanie wykresu funkcji $y = \phi_{\mu,\sigma}(x)$ można rozpocząć od wyznaczenia wartości tej funkcji dla argumentów równych $\mu - \sigma$, μ i $\mu + \sigma$; należy skorzystać z wypukłości tej funkcji na przedziałach $(-\infty, \mu - \sigma]$ i $[\mu + \sigma, \infty)$ oraz z jej wklęsłości na przedziale $[\mu - \sigma, \mu + \sigma]$.

24. Uzasadnij, że „histogram probabilistyczny”, zdefiniowany na stronie 6-tej notatek z wykładu 13-go (z poprzedniego semestru), jest gęstością pewnej zmiennej losowej.

25. Zmierzono wzrost 30-tu losowo wybranych dorosłych mężczyzn w mieście M. Wyniki są przedstawione poniżej:

187, 178, 189, 169, 179, 188, 179, 165, 163, 169, 185, 184, 179, 179, 179, 169, 168, 182, 176,
175, 167, 192, 180, 171, 161, 173, 186, 161, 177, 174.

Sporządź histogram „probabilistyczny” dla tych danych. Przyjmij, że MIN1, lewy koniec pierwszej klasy jest równy 160, a MAX1, prawy koniec ostatniej klasy, jest równy 200; przyjmij, że liczba klas k jest równa 5 (por. notatki do wykładu 13-go z poprzedniego semestru). Następnie, na tym samym rysunku, naszkicuj wykres funkcji $\phi_{m,s}$ z parametrami $m = 176$ i $s = 9$. Oceń „stopień dopasowania” wykresu funkcji $\phi_{m,s}$ do histogramu „probabilistycznego” (wykonanego dla danych dotyczących wzrostu dorosłych mężczyzn).

Uwaga: m i s zostały obliczone przy użyciu wzorów powszechnie stosowanych wzorów, pozwalających na znajdowanie ocen wartości oczekiwanej i odchylenia standardowego zmiennej losowej na podstawie „danych” reprezentujących interesującą nas populację. Dokładniej, m jest równe wartości średniej w próbie zaokrąglonej do najbliższej liczby całkowitej, a s odchyleniu standardowemu w próbie zaokrąglonemu do najbliższej liczby całkowitej, dla przytoczonych wyżej danych (por. książkę J. Koronackiego i J. Mielniczuka, Statystyka dla studentów kierunków technicznych i przyrodniczych, WNT 2001, podrozdział 1.3).

Mariusz Grzędziel