

1. Obliczyć

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)}.$$

2. Uzasadnić, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2} < 1.$$

3. Uzasadnić, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} < 2.$$

4. Oznaczmy

$$s_n \equiv \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} = 1 + 1 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n}.$$

Uzasadnić, że

$$0 < e - s_n < \frac{1}{n!n}.$$

Sprawdzić, że  $s_{10}$  przybliża liczbę  $e$  z błędem mniejszym niż  $10^{-7}$ .

5. Obliczyć wartości funkcji  $f(x) = e^x$  oraz  $g(x) = 1 + x$  dla argumentów  $x$  równych:

$$-0,3; -0,2; -0,1; 0,1; 0,2; 0,3.$$

Wyniki przedstawić w formie tabelki. Czy wyniki te dają podstawę do stwierdzenia, że dla  $x \in [-0,3, 0,3]$  względny błąd przybliżenia wartości funkcji  $f$  wartościami funkcji  $g$  nie przekracza 6%?

6. Udowodnij, że ciąg

$$a_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$$

jest zbieżny do nieskończoności (wg. terminologii przyjętej w [Kur08, str. 31]: rozbieżny do nieskończoności).

7. Udowodnij, że ciąg

$$a_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{k}$$

jest ograniczony. Co można powiedzieć o jego zbieżności?

8. Na podstawie danych policyjnych ustalono, że na pewnym ruchliwym skrzyżowaniu miesięczna liczba kolizji ma rozkład Poissona z parametrem  $\lambda = 3$ . Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia, które polega na tym, że w najbliższym miesiącu na tym skrzyżowaniu:

(a) będzie miała dokładnie jedna kolizja;

(b) liczba kolizji będzie większa niż 3.

9. Zakładamy, że zmienna losowa  $X$  ma rozkład Poissona z parametrem  $\lambda > 0$ . Oblicz

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_k,$$

gdzie

$$p_k = P(X = k), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

10. Zakładamy, że zmienna losowa  $Y$  ma rozkład geometryczny z parametrem  $p > 0$ . Oblicz

$$\sum_{n=1}^{\infty} q_k,$$

gdzie

$$q_k = P(X = k), \quad k = 1, 2, \dots$$

*Mariusz Grządziel*