

1. Znajdź asymptotę poziomą w $-\infty$ funkcji $f(x) = e^x + 3$.
2. Liczebność populacji pewnych gatunków zwierząt można opisać za pomocą funkcji logistycznej określonej wzorem:

$$f(t) = \frac{a}{1 + be^{-ct}},$$

gdzie $a > 0$, $b > 0$ i $c > 0$ są pewnymi stałymi („parametrami trendu logistycznego”); zmienna t jest rozumiana jako czas.

- (a) Znajdź asymptoty poziome w $-\infty$ i ∞ funkcji f ;
 - (b) naskicuj przebieg funkcji f dla parametrów $a = 2$, $b = 20$ i $c = 4$.
3. Oblicz $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ dla :
 - (a) funkcji $f(x) = c$ i $x_0 \in \mathbb{R}$, gdzie c jest ustaloną liczbą rzeczywistą.
 - (b) funkcji $f(x) = x^3$ i $x_0 \in \mathbb{R}$;
 - (c) funkcji $f(x) = x^3 + 1$ i $x_0 \in \mathbb{R}$;
 - (d) funkcji $f(x) = x^{-1}$ i $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

4. Funkcja *signum*, oznaczana przez *sgn*, określona jest wzorem:

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0. \end{cases}$$

- (a) Oblicz granice: prawostronną i lewostronną funkcji *signum* w punkcie $x_0 = 0$.
- (b) Uzasadnij, że funkcja *signum* jest ciągła na $(0, \infty)$.
- (c) Uzasadnij, że funkcja ta nie jest ciągła na $(-\infty, \infty)$.

Uwaga W tym zadaniu, a także w zadaniach 5-tym i 6-tym, należy skorzystać z twierdzenia 4-go z wykładu 4-go.

5. Wyznacz stałe a i b takie, że funkcja f dana wzorem

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & x < -2, \\ ax + b, & -2 \leq x \leq 0, \\ x^3 + 1, & x > 0 \end{cases}$$

jest ciągła na $(-\infty, \infty)$. Naskicuj wykres funkcji f .

Uwaga W zadaniu należy skorzystać z faktu, że funkcja wielomianowa jest ciągła na przedziale $(-\infty, \infty)$. mówiącego, że funkcja f jest ciągła w punkcie x_0 wtedy i tylko wtedy, gdy jej granice: prawostronna w x_0 jest równa granicy lewostronnej w x_0

6. Wyznacz stałe a i b takie, że funkcja f dana wzorem

$$f(x) = \begin{cases} 2^x - 1, & x < -2, \\ ax + b, & -2 \leq x \leq 0, \\ x^3 + 1, & x > 0. \end{cases}$$

jest ciągła na przedziale $(-\infty, \infty)$. Naskicuj wykres funkcji f .

Uwaga W zadaniu należy skorzystać z faktu, że funkcje wykładnicza oraz wielomianowa są ciągłe na przedziale $(-\infty, \infty)$.

7. (a) Niech $S(t)$ oznacza położenie na osi punktu materialnego poruszającego się wzdłuż osi OX w chwili t . Podać interpretację fizyczną ilorazu różnicowego

$$\frac{S(t_0 + \Delta t) - S(t_0)}{\Delta t}$$

oraz pochodnej $S'(t_0)$.

- (b) Niech $v(t)$ oznacza szybkość punktu materialnego poruszającego się wzdłuż osi OX w chwili t . Podać interpretację fizyczną ilorazu różnicowego

$$\frac{v(t_0 + \Delta t) - v(t_0)}{\Delta t}$$

oraz pochodnej $v'(t_0)$.

Mariusz Grządziel