

Granica funkcji — wykład 4

dr Mariusz Grządziel

rok akademicki 2013/2014, semestr zimowy

Problem — obliczanie prędkości chwilowej

Droga s , jaką przemierzy kulka ołowiana upuszczona z wysokiej wieży po czasie t :

$$s = \frac{gt^2}{2},$$

gdzie $g = 9,81 \frac{m}{s^2}$.

Chcemy znaleźć prędkość kulki w danym momencie, np. dla $t = 2$.

Prędkość kulki w chwili t możemy zdefiniować jako liczbę do której zbiega iloraz

$$\frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t}$$

gdy Δt zbiega do 0. Ponieważ

$$\frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t} = \frac{0,5(gt^2 + 2gt\Delta t + g(\Delta t)^2 - gt^2)}{\Delta t} = gt + g\frac{\Delta t}{2},$$

więc intuicja podpowiada nam, że prędkość kulki w chwili t jest równa gt .

Pojęcie granicy funkcji w punkcie

Dla dowolnego ciągu (d_n) takiego, że:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d_n \rightarrow 0, \quad d_n \neq 0 \text{ dla } n \in \mathbb{N}, \quad (1)$$

ciąg $v(d_n)$ (prędkości średnich na odcinku $[t, t + d_n]$)

$$v(d_n) = \frac{s(t + d_n) - s(t)}{d_n} = \frac{0,5(gt^2 + 2gtd_n + gd_n^2 - gt^2)}{d_n} = gt + g\frac{d_n}{2}$$

jest zbieżny do granicy właściwej gt .

Innymi słowy, gt jest wspólną granicą wszystkich ciągów $v(d_n)$ takich, że (d_n) spełnia warunki (1).

Granica funkcji — definicja

Oznaczenia $S(x_0, r) = (x_0 - r, x_0) \cup (x_0, x_0 + r)$, $x_0 \in \mathbb{R}$, $r > 0$.

$S(x_0)$: skrócony zapis dla „ $S(x_0, r)$ dla pewnego $r > 0$ ”.

Definicja 1. Niech $x_0 \in \mathbb{R}$ oraz niech funkcja f będzie funkcją określoną przynajmniej na sąsiedztwie $S(x_0, r)$ dla pewnego $r > 0$. Liczba g jest granicą właściwą funkcji f w punkcie x_0 , co zapisujemy

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = g,$$

wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego ciągu punktów (x_n) z sąsiedztwa $S(x_0, r)$ zbieżnego do x_0 mamy:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = g.$$

Prędkość jako granica funkcji

Rozważmy punkt materialny poruszający się wzdłuż osi OX ; położenie punktu w chwili t będziemy oznaczali przez $S(t)$. Prędkość chwilową tego punktu materialnego w chwili t_0 można zdefiniować jako:

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{S(t) - S(t_0)}{t - t_0},$$

jeśli ta granica istnieje. Tak określona granica: „pochodna drogi po czasie”. Pojęcie pochodnej i jej zastosowania: wykłady 5-ty i następne. Dziś: bardziej „bezpośrednie zastosowania”: pojęcia funkcji ciągłej w punkcie, nieciągłej w punkcie, asymptoty itd.

Granica funkcji w $\pm\infty$

Przypomnijmy, że

Definicja 2. Mówimy, że ciąg (a_n) jest zbieżny do ∞ , jeżeli dla każdej liczby r istnieje takie n_0 , że dla $n > n_0$ jest $a_n > r$.

Definicja 3. Przez $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ oznaczamy wspólną granicę ciągów $f(x_1), f(x_2), \dots$ takich, że $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$ (o ile taka granica istnieje).

Analogicznie definiujemy granicę funkcji w $-\infty$.

Przykład 1. $\lim_{x \rightarrow \infty} a^x = 0$ dla $a \in (0, 1)$.

Niewłaściwa granica funkcji w punkcie

Definicja 4. Funkcja f ma w punkcie x_0 granicę niewłaściwą ∞ , co oznaczamy przez

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty,$$

jeżeli ∞ jest wspólną granicę ciągów $f(x_1), f(x_2), \dots$ takich, że $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$ (o ile taka granica istnieje).

Analogicznie definiujemy granicę niewłaściwą $-\infty$ w punkcie x_0 .

Przykład 2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = \infty$.

Twierdzenia o granicach właściwych funkcji

Twierdzenie 1 (o arytmetyce granic funkcji). Jeżeli funkcje f i g mają granice właściwe w punkcie x_0 , to

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) + \lim_{x \rightarrow x_0} g(x), \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) - \lim_{x \rightarrow x_0} g(x), \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (cf(x)) = c \lim_{x \rightarrow x_0} f(x), \quad c \in \mathbb{R}, \quad (4)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x), \quad (5)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)}, \quad \text{o ile } \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \neq 0, \quad (6)$$

Uwaga. Powyższe twierdzenie jest prawdziwe także dla granic funkcji w ∞ i w $-\infty$.

Przykład

Korzystając z twierdzeń o arytmetyce granic funkcji można obliczyć:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x^5-1} = \frac{1}{5}.$$

Granica prawostronna, lewostronna

Uwaga Jeśli w definicjach granicy w punkcie (właściwej, niewłaściwej ∞ lub niewłaściwej $-\infty$) zamienimy „ $S(x_0, r)$ ” na sąsiedztwo prawostronne punktu x_0

$$S^+(x_0) = (x_0, x_0 + r)$$

dla pewnego $r > 0$, to otrzymamy definicję granicy prawostronnej (odpowiednio: właściwej, niewłaściwej ∞ lub niewłaściwej $-\infty$) funkcji f w punkcie x_0 ; granica lewostronna funkcji f (właściwa, niewłaściwa ∞ lub niewłaściwa $-\infty$) może być określona w analogiczny sposób.

Notacja Prawostronną granicę funkcji f w punkcie x_0 będziemy oznaczać $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x)$ lub $\lim_{x \rightarrow a+} f(x)$; analogicznie lewostronną granicę funkcji f w punkcie x_0 będziemy oznaczać $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x)$ lub $\lim_{x \rightarrow a-} f(x)$.

Przykład 3. $\lim_{x \rightarrow 0-0} \frac{1}{x} = -\infty$.

Asymptota pozioma

Definicja 5 (asymptoty poziomej funkcji). Prosta $y = b$ nazywamy asymptotą poziomą funkcji f w ∞ wtedy i tylko wtedy, gdy:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - b) = 0.$$

Analogicznie definiujemy asymptotę poziomą w $-\infty$.

Przykład. Prosta $y = 0$ jest asymptotą poziomą funkcji wykładniczej $f(x) = (\frac{1}{2})^x$ w $+\infty$ bo:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left[\left(\frac{1}{2} \right)^x - 0 \right] = 0.$$

Asymptota ukośna

Definicja 6. Mówimy, że prosta $y = ax + b$ jest asymptotą ukośną funkcji f w ∞ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$a = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} \text{ oraz } b = \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - ax].$$

Uwaga: asymptota pozioma jest szczególnym przypadkiem asymptoty ukośnej.

Przykład 4. Prosta $y = x$ jest asymptotą ukośną funkcji $f(x) = x + \frac{1}{x}$ w ∞ .

Asymptoty pionowe

Definicja 7. Prosta $x = a$ jest asymptotą pionową lewostronną funkcji f , jeżeli

$$\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = -\infty \text{ albo } \lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = \infty.$$

Asymptoty pionowe prawostronne definiujemy analogicznie.

Przykład 5. Prosta $x = 0$ jest asymptotą pionową lewostronną i prawostronną funkcji $f(x) = \frac{1}{x}$ (czyli jest tzw. asymptotą obustronną funkcji f).

Funkcje ciągłe

Definicja 8 (funkcji ciągłej w punkcie). Niech $x_0 \in \mathbb{R}$ oraz niech funkcja f będzie określona przynajmniej na otoczeniu $(x_0 - r, x_0 + r)$, gdzie r jest pewną liczbą dodatnią. Funkcja f jest ciągła w punkcie x_0 wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0). \quad (7)$$

Obrazowo: funkcja jest ciągła w punkcie, gdy jej wykres nie „przerywa się” w tym punkcie.

Funkcje lewostronnie i prawostronnie ciągłe

Definicja 9 (funkcji lewostronnie ciągłej w punkcie). Niech $x_0 \in \mathbb{R}$ oraz niech funkcja f będzie określona przynajmniej na przedziale $(x_0 - r, x_0]$ dla pewnego $r > 0$. Funkcja f jest lewostronnie ciągła w punkcie x_0 wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = f(x_0). \quad (8)$$

Analogicznie definiujemy funkcję prawostronną w punkcie x_0 .

Definicja 10. Przedziałem nazywamy zbiór postaci: (a, b) , $(a, b]$, $[a, b)$, $[a, b]$, gdzie $a < b$, lub $(-\infty, a)$, $(-\infty, a]$, (a, ∞) , $[a, \infty)$, $(-\infty, \infty)$, gdzie $a \in \mathbb{R}$.

Uwaga. Przedziałami otwartymi będziemy nazywać zbiory postaci (a, b) , $(-\infty, a)$, (a, ∞) , $(-\infty, \infty)$, $a, b \in \mathbb{R}$.

Funkcje ciągłe na przedziale otwartym

Definicja 11. Funkcja jest ciągła na przedziale otwartym I , jeżeli jest ciągła w każdym punkcie tego zbioru.

Funkcje ciągłe na przedziale domkniętym — co najmniej z jednej strony Mówimy, że funkcja $f(x)$ jest ciągła na przedziale $[a, \infty)$, jeśli jest ciągła na przedziale otwartym (a, ∞) i prawostronna granica funkcji f w punkcie a jest równa $f(a)$. Funkcje ciągłe na $(\infty, a]$, $(b, a]$ itd. definiujemy analogicznie.

Przykłady

- Funkcja f określona przez: $f(x) = \frac{x}{|x|}$ dla $x \neq 0$, $f(0) = 0$, nie jest ciągła prawostronnie ani lewostronnie w $x_0 = 0$ (nie jest tym bardziej ciągła w $x_0 = 0$).
- Funkcja g określona przez: $g(x) = \frac{x}{|x|}$ dla $x \neq 0$, $g(0) = 1$ jest ciągła prawostronnie w $x_0 = 0$.

Działania na funkcjach ciągłych

Twierdzenie 2. Jeżeli funkcje f i g są ciągłe w punkcie x_0 , to:

- funkcja $f + g$ jest ciągła w punkcie x_0 ;
- funkcja $f - g$ jest ciągła w punkcie x_0 ;

- funkcja $f \cdot g$ jest ciągła w punkcie x_0 ;
- funkcja $\frac{f}{g}$ jest ciągła w punkcie x_0 , o ile $g(x_0) \neq 0$.

Twierdzenie to jest również prawdziwe dla funkcji lewostronnie (lub prawostronnie) ciągłych.

Twierdzenie 3. *Jeżeli*

1. funkcja f jest ciągła w punkcie x_0 ,
 2. funkcja g jest ciągła w punkcie $y_0 = f(x_0)$
- to funkcja $g \circ f$ jest ciągła w punkcie x_0 ;
przypominamy, że $(g \circ f)(x_0) = g(f(x_0))$.

Z powyższych twierdzeń wynika, że wiele funkcji występujących w zastosowaniach praktycznych to funkcje ciągłe (funkcje: wielomianowa, sinus, cosinus, wykładnicza i logarytmiczna są funkcjami ciągłymi).

Twierdzenie 4. *Funkcja f jest ciągła w punkcie a wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = f(a),$$

tj. wtedy i tylko wtedy, gdy f jest zarówno prawostronnie ciągła jak i lewostronnie ciągła w a .

Przykład 6. *Chcemy znaleźć wartość parametru a , dla której funkcja f określona wzorem*

$$f(x) = \begin{cases} 2^x, & x \leq 0; \\ x + a, & x > 0 \end{cases}$$

jest ciągła. Funkcje $y = 2^x$ i $y = x + a$ są ciągłe (na swoich dziedzinach naturalnych). Zadanie sprowadza się do wyznaczenia a takiego, że

$$\lim_{x \rightarrow 0-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0+0} f(x) = f(0). \quad (9)$$

Parametr a jest rozwiązaniem równania $2^0 = 0 + a$, skąd $a = 1$.

Wskazówki bibliograficzne

Granica funkcji - definicja. Wykład doc. Janusza Górniaka:
<https://www.youtube.com/watch?v=jYdv5bsj9kk>