Wykład 8: Całka nieoznaczona

dr Mariusz Grządziel

semestr zimowy, rok akademicki 2013/2014

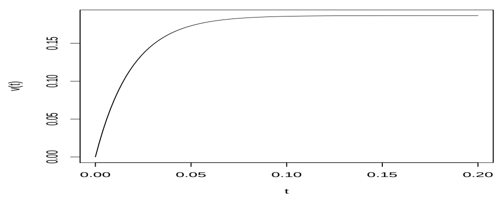
Motywacja

Problem 1. *Kropla wody o średnicy* $0{,}07$ *mm porusza się z prędkością*

$$v(t) = \frac{g}{c}(1 - e^{-ct}),$$

gdzie g *oznacza przyśpieszenie ziemskie, a stała* $c = 52{,}6\frac{1}{s}$ *została wyznaczona eksperymentalnie.*
W chwili $t = 0$ *prędkość jest równa* 0.
Chcemy znaleźć drogę $s(t)$*, jaką przebyło ciało po upływie czasu* t.

Prędkość małej kropli



Rysunek 1: Prędkość kropli o średnicy $0{,}07$ mm w zależności od czasu

Funkcja pierwotna
Problem sprowadza się do znalezienia funkcji $s(t)$ takiej, że

$$s'(t) = v(t), t \in (0, \infty). \tag{1}$$

Definicja 1 (funkcji pierwotnej)**.** *Funkcja* F *jest funkcją pierwotną funkcji* f *na przedziale otwartym* $\mathbf{I}$*, jeśli*

$$F'(x) = f(x) \text{ dla każdego } x \in \mathbf{I}.$$

Uwaga Jeżeli funkcja f jest określona na przedziale domkniętym $[a, b]$, to F nazywamy funkcją pierwotną funkcji f, jeżeli

$$F'(x) = f(x) \text{ dla } x \in (a, b), \quad F'_+(a) = f(a), \quad F'_-(b) = f(b).$$

Funkcja pierwotna — przykłady

Przykład 1. *Funkcjami pierwotnymi* $f(x) = x^3$ *na przedziale* $\mathcal{I} = \mathbb{R}$ *są na przykład:*

- $F_1(x) = \frac{x^4}{4} + 2$;
- $F_2(x) = \frac{x^4}{4} - 3$.

Twierdzenie 1. *Niech* F *będzie funkcją pierwotną funkcji* f *na przedziale* $\mathbf{I}$*.Wtedy*
(i) $G(x) = F(x) + C$*, gdzie* $C \in \mathbb{R}$*, jest funkcja pierwotną funkcji* f *na* $\mathbf{I}$,
(ii) każdą funkcję pierwotną funkcji f *na* $\mathbf{I}$ *można przedstawić w postaci* $F(x) + D$*, gdzie* $D \in \mathbb{R}$.

Uwaga. Powyższe twierdzenie mówi o postaci funkcji pierwotnych dla ustalonej funkcji. Funkcje pierwotne mają postać $F(x) + C$

Twierdzenie 2. *Jeżeli funkcja jest ciągła na przedziale, to ma funkcję pierwotną na tym przedziale.*

Uwaga. Funkcja pierwotna funkcji elementarnej nie musi być funkcją elementarną, np. pierwotna funkcji:

$$f(x) = e^{-x^2}$$

nie jest funkcją elementarną.
Uwaga Pojęcie funkcji elementarnej zostało określone podczas wykładu 2-go (por. Definicja 15)

Całki nieoznaczone

Definicja 2 (całki nieoznaczonej)**.** *Niech F będzie funkcją pierwotną funkcji f na przedziale* **I**. *Całką nieoznaczoną funkcji f na przedziale* **I** *oznaczamy zbiór funkcji*

$$\{F(x) + C : C \in \mathbb{R}\}.$$

Całkę nieoznaczoną funkcji f oznaczamy przez $\int f(x)dx$.

Całka oznaczona — notacja
Uwaga. W dalszej części wykładu będziemy opuszczali nawiasy klamrowe w definicji całki nieoznaczonej, a więc np. zamiast pisać

$$\int xdx = \left\{\frac{x^2}{2} + C, C \in \mathbb{R}\right\}$$

będziemy pisać:

$$\int xdx = \frac{x^2}{2} + C.$$

Całki nieoznaczone ważniejszych funkcji elementarnych

Wzór	Zakres zmienności
$\int 0dx = C$	$x \in \mathbb{R}$
$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$	$n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ oraz $x \in \mathbb{R}$
$\int x^p dx = \frac{x^{p+1}}{p+1} + C$	$p = -2, -3, \ldots; x < 0$ lub $x > 0$
$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$	$\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$
$\int \frac{1}{x} dx = \ln \lvert x \rvert + C$	$x \in (-\infty, 0)$ lub $x \in (0, \infty)$
$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$	$0 < a \neq 1$ oraz $x \in \mathbb{R}$
$\int e^x dx = e^x + C$	$x \in \mathbb{R}$
$\int \sin xdx = -\cos x + C$	$x \in \mathbb{R}$
$\int \cos xdx = \sin x + C$	$x \in \mathbb{R}$

gdzie C — dowolna stała rzeczywista.

Twierdzenie o całkach nieoznaczonych

Twierdzenie 3 (najprostsze reguły całkowania)**.** *Jeżeli funkcje f i g mają funkcje pierwotne, to*
(i) $\int (f(x) + g(x))\, dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx,$
(ii) $\int (f(x) - g(x))\, dx = \int f(x)dx - \int g(x)dx,$
(iii) $\int (cf(x))\, dx = c \int f(x)dx,$ *gdzie* $c \in \mathbb{R}$

Przykład 2. *Korzystając z Twierdzenia 3 chcemy obliczyć całkę* $\int (x - 3e^x)\, dx$*:*

$$\int (x - 3e^x)\, dx = \int xdx - 3\int e^x dx = \frac{x^2}{2} - 3e^x + C.$$

Całkowanie przez części

Twierdzenie 4 (o całkowaniu przez części))**.** *Jeżeli funkcje f i g mają ciągłe pochodne, to*

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx.$$

Ćwiczenie 1. *Korzystając z twierdzenia o całkowaniu przez części obliczyć podane całkę nieoznaczoną:*

$$\int x \cos xdx.$$

Przyjmujemy $f(x) = x$, $g'(x) = \cos x$. Wtedy $f'(x) = 1$ i (można przyjąć np.) $g(x) = \sin x$.

$$\int x \cos xdx = x \sin x - \int \sin xdx = x \sin x + \cos x + C.$$

Całkowanie przez podstawienie- podstawienie liniowe

Twierdzenie 5. *Jeśli*

$$\int f(t)dt = F(t) + C,$$

to

$$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C.$$

Dowód wynika z twierdzenia o pochodnej funkcji złożonej:

$$[F(ax+b)]' = aF'(ax+b) = af(ax+b).$$

Przykłady. Z twierdzenia 5 wynika:
(i) $\int \cos mx\, dx = \frac{1}{m}\sin mx dx + C$,
(ii) $\int e^{-2x}\, dx = -\frac{1}{2}e^{-2x} + C$.

Twierdzenie 6 (o całkowaniu przez podstawienie)**.** *Jeśli wiadomo, że*

$$\int g(t)dt = G(t) + C,$$

to

$$\int g(\omega(x))\omega'(x)dx = G(\omega(x)) + C. \tag{2}$$

Zakładamy, że $g(t)$ i $\omega'(t)$ są ciagłe.

Dowód tego twierdzenia wynika z twierdzenia o różniczkowaniu funkcji złożonej.
Z twierdzenia tego wnioskiem jest Twierdzenie 5, które odpowiada przypadkowi, gdy funkcja ω jest liniowa:

$$\omega(x) = ax + b.$$

Przykład
Chcemy obliczyć całkę nieoznaczoną

$$\int \sin^3 x \cos x dx.$$

Powyższa całka jest postaci takiej, jak wyrażenie po lewej stronie równości (2) — w przypadku, gdy $g(t) = t^3$ i $\omega(y) = \sin y$. Funkcja $G(t) = \frac{1}{4}t^4$ jest funkcją pierwotną dla $g(t)$, stąd

$$\int \sin^3 x \cos x dx = \frac{1}{4}\sin^4 x + C.$$

Droga przebyta przez kroplę — c.d.
Możemy teraz łatwo znaleźć funkcję $s(t)$ z Problemu 1. Mamy $s(0) = 0$ oraz

$$\int v(t)dt = \int \frac{g}{c}(1 - e^{-ct})dt = \frac{g}{c}(t + \frac{1}{c}e^{-ct}) + C.$$

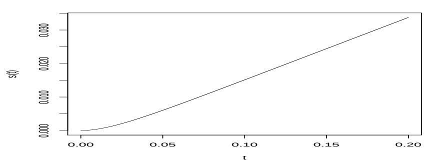
Funkcja s jest równa funkcji pierwotnej z

$$C = -\frac{g}{c^2},$$

czyli

$$s(t) = \frac{g}{c}\big(t + \frac{1}{c}e^{-ct}\big) - \frac{g}{c^2}.$$

Droga przebyta przez małą kroplę



Rysunek 2: Droga przebyta przez kroplę o średnicy 0,07 mm w zależności od czasu