

Wykład 2. Pojęcie całki niewłaściwej — do rachunku prawdopodobieństwa

dr Mariusz Grządziel

4 marca 2014

Pole trapezu krzywoliniowego

Przypomnienie: figurę ograniczoną przez:

- wykres funkcji $y = f(x)$, gdzie f jest funkcją ciągłą;
- proste $x = a$, $x = b$, $a < b$,
- oś OX (tj. prostą $y = 0$)

będziemy nazywać *trapezem krzywoliniowym* (odpowiadającym funkcji f oraz odcinkowi $[a, b]$).

Pole tej figury można przedstawić w postaci całki:

$$\int_a^b f(x)dx.$$

Pole „nieograniczonego” trapezu krzywoliniowego-całka niewłaściwa

Problem: jesteśmy zainteresowani polem figury ograniczonej: wykresem funkcji $f(x) = e^{-x}$ oraz prostymi $y = 0$, $x = 0$.

Pole tego obszaru można określić jako całkę:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T f(x)dx.$$

Korzystając z faktu:

$$\int_0^T e^{-x} dx = -e^{-T} + e^0 = 1 - e^{-T}$$

znajdujemy, że granica ta jest równa 1.

Całka niewłaściwa I rodzaju

Jeżeli funkcja f jest określona na przedziale $[a, \infty)$, dla każdego $T > a$ istnieje całka $\int_a^T f(t)dt$ i istnieje granica skończona

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \int_a^T f(t)dt,$$

to granicę tę nazywamy całką niewłaściwą I rodzaju funkcji f na przedziale $[a, \infty)$ i oznaczamy

$$\int_a^\infty f(t)dt.$$

Analogicznie można zdefiniować całkę niewłaściwą z funkcji f na półprostej $(-\infty, b]$:

$$\int_{-\infty}^b f(t)dt = \lim_{T \rightarrow -\infty} \int_T^b f(t)dt.$$

Całka niewłaściwa I rodzaju — c.d.

Określamy

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt = \int_{-\infty}^a f(t)dt + \int_a^{\infty} f(t)dt,$$

gdzie a jest dowolnie wybranym punktem (liczbą rzeczywistą).

Jeżeli granica (w przypadku całki niewłaściwej na półprostej) lub przynajmniej jedna z granic (w przypadku całki niewłaściwej na prostej) nie istnieje, to powiemy, że dana całka jest rozbieżna.

Jeżeli granica występująca w definicji całki niewłaściwej na półprostej jest równa ∞ , to powiemy, że całka ta jest rozbieżna do ∞ .

Całka niewłaściwa I rodzaju — przykłady

Następujące całki niewłaściwe I rodzaju są zbieżne:

•

$$\int_0^{\infty} e^{-x} dx = 1;$$

•

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|} dx = 2;$$

Przykład rozbieżnej całki niewłaściwej I rodzaju:

$$\int_0^{\infty} \sin x dx.$$

Przykład całki niewłaściwej I rodzaju rozbieżnej do nieskończoności:

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx = \infty.$$

Zmienne losowe typu ciągłego

Definicja 1. Mówimy, że zmienna losowa X jest typu ciągłego, jeśli istnieje nieujemna funkcja g taka, że dla każdych liczb a i b spełniających warunek $-\infty \leq a < b \leq \infty$ zachodzi równość

$$P(a < X < b) = \int_a^b g(x) dx.$$

Rozkład jednostajny na odcinku $[0, 1]$

Przykładem zmiennej losowej typu ciągłego jest rozkład jednostajny na odcinku $[0, 1]$ (oznaczenie: $U(0, 1)$). Jego funkcja gęstości u dana jest wzorem

$$u(x) = \begin{cases} 1, & \text{jeśli } 0 \leq x \leq 1, \\ 0 & \text{jeśli } x < 0 \text{ lub } x > 1. \end{cases}$$

Rozkład ten może opisywać np. czas oczekiwania na autobus A , odjeżdżający do miejscowości B co godzinę, przez pasażera C ; zakładamy, że C nie zna rozkładu jazdy dla tej linii i że przychodzi na przystanek w losowym momencie.

Rozkład jednostajny na odcinku $[0, 1]$ — przykład obliczeń

Czas oczekiwania na autobus — zmienna losowa $Y \sim U(0, 1)$. Prawdopodobieństwo $P\left(\frac{1}{3} < Y < \frac{1}{2}\right)$ jest równe:

$$P\left(\frac{1}{3} < Y < \frac{1}{2}\right) = \int_{1/3}^{1/2} 1 dx = \left[x\right]_{1/3}^{1/2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}.$$

Całka niewłaściwa II rodzaju

Problem: chcemy obliczyć pole obszaru ograniczonego wykresem funkcji

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

i odcinkiem $(0, 1]$ należącym do osi OX. Odpowiednim narzędziem będzie całka niewłaściwa II rodzaju (czyli całka niewłaściwa po przedziale ograniczonym).

Gęstość zmiennej losowej o rozkładzie typu ciągłego

Stwierdzenie 1. *Dowolna funkcja g spełniająca warunki:*

- *dziedziną funkcji g jest zbiór liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$;*
- *$g(x) \geq 0$ dla $x \in \mathbb{R}$;*
- *$\int_{-\infty}^{\infty} g(x) = 1$.*

jest funkcją gęstości pewnej zmiennej losowej typu ciągłego.

Zmiennej losowej typu ciągłego — przykłady

1. Zmienna o rozkładzie jednostajnym na odcinku $[a, b]$

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{jeżeli } x \in [a, b], \\ 0 & \text{jeżeli } x \notin [a, b]. \end{cases}$$

2. Zmienna o rozkładzie wykładniczym z parametrem $\lambda > 0$

$$g(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{jeżeli } x \geq 0, \\ 0 & \text{jeżeli } x < 0. \end{cases}$$

3. Zmienna o rozkładzie normalnym z parametrami $\mu \in (-\infty, \infty)$ i $\sigma > 0$ (czyli $N(\mu, \sigma)$).

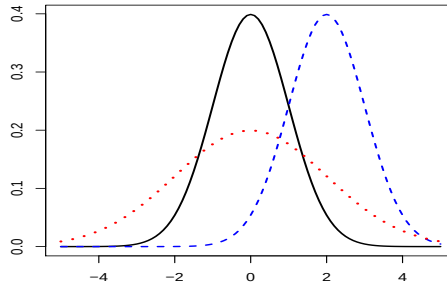
$$g(x) = \phi_{\mu, \sigma}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}.$$

4. Zmienna o rozkładzie Laplace'a z parametrami $\mu \in (-\infty, \infty)$ i $b > 0$.

$$g(x) = \frac{1}{2b} \exp\left(-\frac{|x - \mu|}{b}\right)$$

5. Funkcja histogramowa (gęstość empiryczna): histogram „probabilistyczny” rozumiany jako funkcja.

Sprawdzenie, że gęstości te spełniają warunki wymienione w Stwierdzeniu 1: relatywnie proste, z wyjątkiem gęstości rozkładu normalnego.



Rysunek 1: Wykresy gęstości rozkładów normalnych: $N(0, 1)$ (linia ciągła), $N(0, 2)$ (linia „kropkowana”), $N(2, 1)$ (linia „kreskowana”).

Dystrybuanta zmiennej losowej typu ciągłego

Dla dowolnej zmiennej losowej X jej dystrybuantę F_X definiujemy jako funkcję spełniającą warunek

$$F_X(t) = P(X \leq t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Jeżeli X jest zmienną losową typu ciągłego z gęstością g , to dystrybuanta X spełnia równość

$$F_X(t) = \int_{-\infty}^t g(x) dx.$$

Obliczanie prawdopodobieństw zdarzeń odpowiadających zmiennym losowym typu ciągłego

Niech X będzie zmienną losową typu ciągłego. Niech F_X będzie jej dystrybuantą. Dla dowolnych a i b takich, że $a < b$ prawdziwe są równości:

$$\begin{aligned} P(a < X < b) &= P(a < X \leq b) = P(a \leq X < b) = \\ &= P(a \leq X \leq b) = F_X(b) - F_X(a). \end{aligned}$$

Dystrybuanta rozkładu jednostajnego

Gęstość zmiennej losowej X o rozkładzie jednostajnym na odcinku $[a, b]$

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{jeżeli } x \in [a, b], \\ 0 & \text{jeżeli } x \notin [a, b]. \end{cases}$$

Dla $t < a$ mamy $F_X(t) = 0$.

Dla $t \in [a, b]$ mamy:

$$F_X(t) = \int_a^t g(x) dx = \int_a^t \frac{1}{b-a} dx = \left[\frac{x}{b-a} \right]_a^t = \frac{t-a}{b-a}.$$

Dla $t > b$ mamy $F_X(t) = 1$.

Dystrybuanta rozkładu normalnego

Nie da się wyrazić za pomocą operacji algebraicznych.

Rozwiązanie problemu:

1. stabilizowanie wartości dystrybuanty rozkładu $N(0, 1)$;
2. dla rozkładu $N(\mu, \sigma)$ wykorzystujemy fakt:

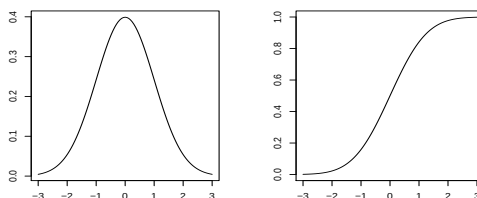
$$\Phi_{\mu, \sigma}(t) = \Phi\left(\frac{t - \mu}{\sigma}\right), \quad (1)$$

gdzie Φ oznacza dystrybuantę rozkładu $N(0, 1)$, a $\Phi_{\mu, \sigma}$ oznacza dystrybuantę rozkładu normalnego z parametrami μ i σ .

Równość (1) wynika z równości pochodnych funkcji po jej lewej i prawej stronie oraz z równości

$$\Phi_{\mu, \sigma}(\mu) = \Phi\left(\frac{\mu - \mu}{\sigma}\right) = \Phi(0) = \frac{1}{2}.$$

Własności funkcji Φ



Rysunek 2: Wykresy gęstości ϕ rozkładu normalnego (z lewej strony) $N(0, 1)$ i dystrybuanty rozkładu normalnego Φ (z prawej strony)

Można pokazać, że $\Phi(0) = 0,5$ oraz $\Phi(t) = 1 - \Phi(-t)$ dla dowolnego t ; stąd można się ograniczyć do tablicowania funkcji Φ dla $t \geq 0$.

Obliczanie prawdopodobieństw w przypadku rozkładu normalnego — przykład

Niech X oznacza wzrost dorosłych mężczyzn w państwie A ; zakładamy, że $X \sim N(177, 10)$. Chcemy obliczyć: (a) $P(174 < X < 182)$, (b) $P(X > 182)$. Obliczenia dla (a):

$$\begin{aligned} P(174 < X < 182) &= \Phi\left(\frac{182 - 177}{10}\right) - \Phi\left(\frac{174 - 177}{10}\right) = \\ &= \Phi(0,5) - \Phi(-0,3) = \Phi(0,5) - (1 - \Phi(0,3)) = \\ &= \Phi(0,5) + \Phi(0,3) - 1 \approx 0,6915 + 0,6179 - 1 = 0,3094. \end{aligned}$$

Obliczenia dla (b) można przeprowadzić w analogiczny sposób korzystając z równości:

$$P(X > 182) = 1 - P(X < 182) = 1 - \Phi\left(\frac{182 - 177}{10}\right) = 1 - \Phi(0,5).$$

Lektura uzupełniająca

T. Bednarski, Elementy matematyki w naukach ekonomicznych. Oficyna ekonomiczna. Kraków 2004, str. 234–244.

Koronacki, J., Mielniczuk, J. Statystyka dla studentów kierunków technicznych i przyrodniczych. WNT. Warszawa 2001, s. 111–114.