

Wykład 10. Funkcje wielu zmiennych

dr Mariusz Grządział

6 maja 2014 (ostatnie poprawki: 12 maja 2014)

Funkcje wielu zmiennych

Przestrzeń dwuwymiarowa, oznaczana w literaturze matematycznej symbolem $\mathbb{R}^2$, może być utożsamiona z parami liczb rzeczywistych:

$$\mathbb{R}^2 = \{(x_1, x_2), \quad x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}.$$

Przestrzeń n -wymiarowa (oznaczenie: $\mathbb{R}^n$), może być określona jako zbiór n -wymiarowych wektorów:

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, \dots, x_n) : \quad x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}\}.$$

Funkcje wielu zmiennych

Funkcja przyporządkowująca elementom przestrzeni $\mathbb{R}^n$ liczby rzeczywiste— funkcja n zmiennych.

Dziedziną funkcji n zmiennych może być $\mathbb{R}^n$ lub podzbiór $\mathbb{R}^n$.

Funkcje wielu zmiennych—przykłady

Rozważmy następujące funkcje dwóch zmiennych:

$$\begin{aligned} f_1(x, y) &= \begin{cases} \sqrt{1 - x^2 - y^2}, & \text{gdy } x^2 + y^2 \leq 1, \\ 0, & \text{gdy } x^2 + y^2 > 1; \end{cases} \\ f_2(x, y) &= |xy|; \\ f_3(x, y) &= x^2 + y^2. \end{aligned}$$

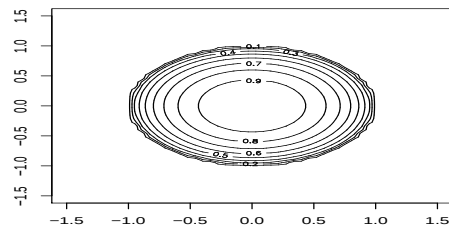
Funkcje dwóch zmiennych można przedstawiać graficznie przy użyciu wykresów konturowych, wypełnionych wykresów konturowych oraz wykresów perspektywicznych.

Podstawowe pojęcia analizy funkcji wielu zmiennych

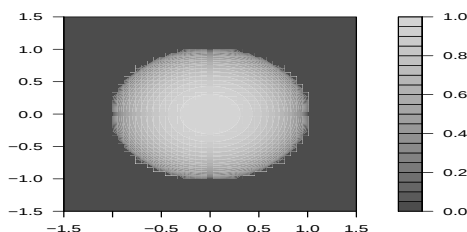
Jesteśmy zainteresowani odpowiednikami pojęć analizy jednej zmiennej

- ciągłości;
- pochodnej;
- całki

dla przypadku funkcji n zmiennych.



Rysunek 1: Wykres konturowy dla funkcji f_1



Rysunek 2: „Wypełniony” wykres konturowy dla funkcji f_1

Pochodna cząstkowa

Nasz cel— znalezienie wielowymiarowego odpowiednika pojęcia pochodnej. Pojęcie pomocnicze : pochodna cząstkowa.

Definicja 1. Pochodną cząstkową funkcji dwóch zmiennych $f(x, y)$ względem zmiennej x , oznaczaną symbolem $\frac{\partial f}{\partial x}$, nazywamy pochodną funkcji f względem argumentu x przy ustalonej wartości y ; analogicznie pochodną cząstkową funkcji $f(x, y)$ względem zmiennej y , oznaczaną symbolem $\frac{\partial f}{\partial y}$, nazywamy pochodną funkcji f względem argumentu y przy ustalonej wartości x .

W podobny sposób można określić pochodną funkcji wielu zmiennych.

Pochodna cząstkowa— funkcja n zmiennych.

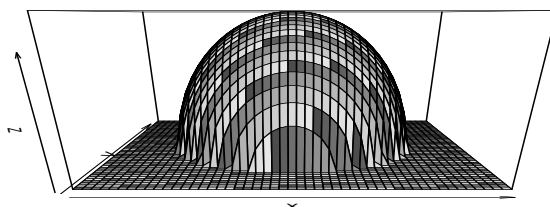
Pochodna cząstkowa— przykład

Dla funkcji $f_3(x, y) = x^2 + y^2$:

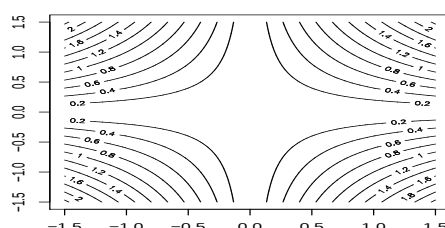
$$\frac{\partial f_3}{\partial x} = 2x,$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial y} = 2y.$$

Różniczkowalność funkcji wielu zmiennych



Rysunek 3: Wykres perspektywiczny funkcji f_1



Rysunek 4: Wykres konturowy funkcji f_2

Funkcja f jednej zmiennej jest różniczkowalna w punkcie x_0 , jeżeli różnicę

$$f(x) - f(x_0)$$

dla x z otoczenia x_0 można „dobrze” przybliżyć przez funkcję liniową.

Analogicznie: funkcja g dwóch zmiennych jest różniczkowalna w punkcie (x_0, y_0) jeśli różnicę

$$g(x, y) - g(x_0, y_0)$$

dla (x, y) z otoczenia x_0, y_0 można „dobrze” przybliżyć funkcją liniową l

$$l(x, y) = a(x - x_0) + b(y - y_0),$$

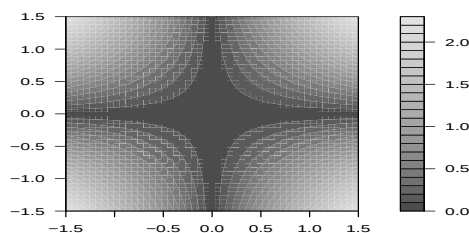
gdzie a i b są ustalonymi liczbami (dokładniejsze określenie pojęcia różniczkowalności funkcji wielu zmiennych: [Bed04, rozdz. 6]).

Funkcja l : różniczka zupełna dla funkcji g w punkcie (x, y) .

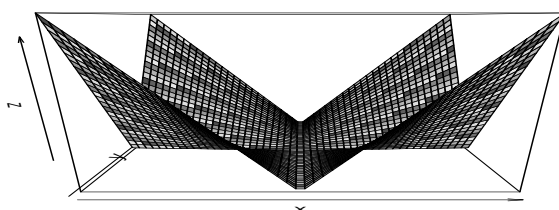
Odwzorowanie l rozumiane jako funkcja przyrostów $\Delta x = x - x_0$ i $\Delta y = y - y_0$: pochodna funkcji g w punkcie (x, y) .

Funkcja jest różniczkowalna na zbiorze $\mathbb{R}^2$, jeżeli jest różniczkowalna w każdym punkcie tego zbioru.

Różniczkowalność funkcji wielu zmiennych—przykłady



Rysunek 5: „Wypełniony” wykres konturowy funkcji f_2



Rysunek 6: Wykres perspektywiczny funkcji f_2

Funkcja f_1 jest różniczkowalna w punktach (x, y) , dla których

$$x^2 + y^2 \neq 1.$$

Funkcja f_3 jest różniczkowalna na całej płaszczyźnie R^2 .

Różniczka zupełna funkcji dwóch zmiennych

Fakt Jeżeli funkcja f jest różniczkowalna w punkcie (x, y) , to istnieją w tym punkcie pochodne cząstkowe $\frac{\partial f}{\partial x}$ i $\frac{\partial f}{\partial y}$.

Uwaga Istnienie pochodnych cząstkowych funkcji dwóch zmiennych f w (x, y) jest warunkiem koniecznym, ale nie wystarczającym na to, aby funkcja ta była różniczkowalna w tym punkcie.

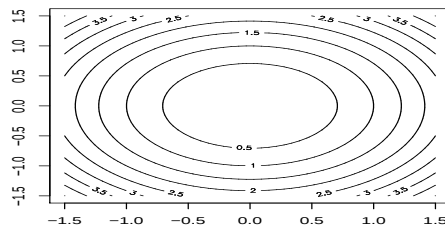
Definicja 2. Różniczkę zupełną funkcji dwóch zmiennych f , różniczkowalnej w punkcie (x, y) , określamy wzorem

$$\Delta x \frac{\partial f}{\partial x} + \Delta y \frac{\partial f}{\partial y},$$

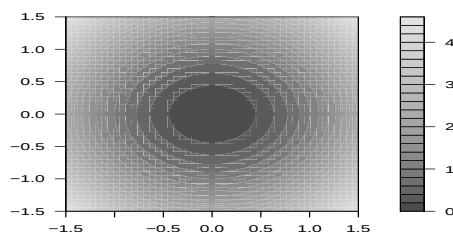
gdzie Δx i Δy oznaczają przyrosty, odpowiednio, pierwszego i drugiego argumentu.

Różniczka zupełna funkcji wielu zmiennych— zastosowania

Pole działki o bokach x i y będziemy oznaczać symbolem $S(x, y)$ (S jest funkcją dwóch zmiennych).



Rysunek 7: Wykres konturowy funkcji f_3



Rysunek 8: „Wypełniony” wykres konturowy funkcji f_3

Pan A miał działkę o wymiarach $x = 50$ i $y = 100$. Na skutek decyzji władz gminy wymiary jego działki zostały zmodyfikowane: nowe wymiary tej działki są równe: $x' = 49$ i $y' = 103$.

Oznaczmy $\Delta x = x' - x$ oraz $\Delta y = y' - y$.

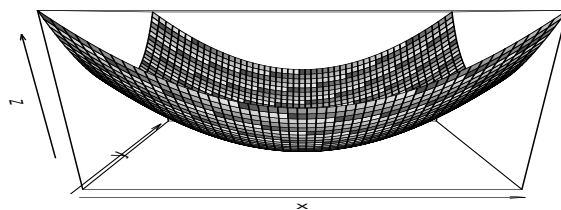
Przyrost pola działki może być wyrażony w postaci:

$$\begin{aligned}\Delta S &= S(x', y') - S(x, y) = \\ &= S(x + \Delta x, y + \Delta) - S(x, y) = \\ &\approx \Delta x \frac{\partial S}{\partial x} + \Delta y \frac{\partial S}{\partial y} \\ &= (-1) \times 100 + 3 \times 50 = 50.\end{aligned}$$

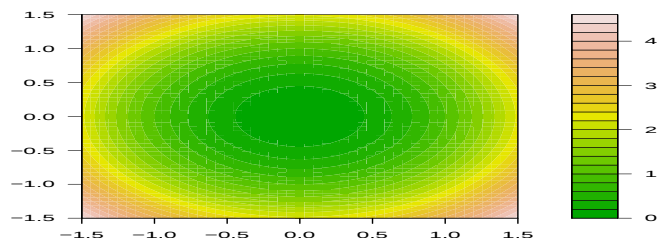
Różniczka zupełna funkcji wielu zmiennych— zastosowania do szacowania błędów pomiarowych

Problem Działka pana B ma $x = 60$ m długości i $y = 80$ m szerokości. Błąd pomiaru (zarówno szerokości jak i długości) wynosi 0.1 m. Chcemy znaleźć oszacowanie błędu pomiaru pola działki.

Pole działki o bokach a i b oznaczamy przez $S(a, b)$.



Rysunek 9: Wykres perspektywiczny funkcji f_3



Rysunek 10: Wykres perspektywiczny funkcji f_3 — skala barw „terrain”

Rzeczywista długość działki jest równa $x + \delta x$ a rzeczywista szerokość działki jest równa $y + \delta y$

Z warunków zadania: $|\delta x| \leq \Delta x$, $|\delta y| \leq \Delta y$.

Mamy:

$$\begin{aligned} S(x + \delta x, y + \delta y) - S(x, y) &\approx \delta x \frac{\partial S}{\partial x} + \delta y \frac{\partial S}{\partial y} \leq \\ &\leq |\delta x| \left| \frac{\partial S}{\partial x} \right| + |\delta y| \left| \frac{\partial S}{\partial y} \right| \leq \\ &\leq |\Delta x| \left| \frac{\partial S}{\partial x} \right| + |\Delta y| \left| \frac{\partial S}{\partial y} \right| = \\ &= 0,1 \times 80 + 0,1 \times 60 = 14. \end{aligned}$$

A więc przyjmujemy, że błąd pomiaru powierzchni działki jest mniejszy niż $14m^2$.

Zastosowania do wyznaczania ekstremalnych wartości funkcji

Jeżeli różniczkowalna funkcja $f(x, y)$ ma w punkcie (x_0, y_0) maksimum lub minimum, to:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0 \quad \text{ i } \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0.$$

Punkty, w których pochodne cząstkowe są równe zero, nazywamy punktem stacjonarnym.

Punkt stacjonarny danej funkcji jest „podejrzany” o to, że funkcja ta przybiera w nim wartość minimalną lub maksymalną.

Przykład.

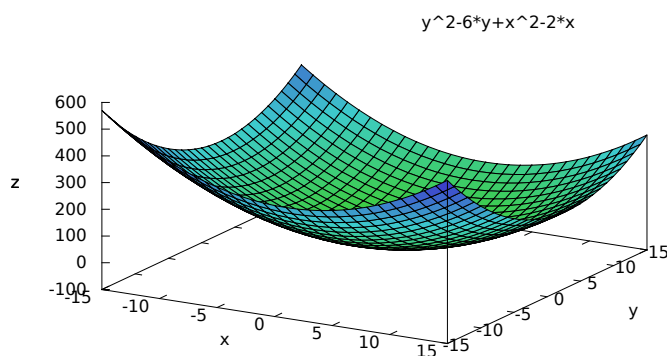
Funkcja $f_5(x, y) = x^2 - 2x + y^2 - 6y$ ma pochodne cząstkowe

$$\frac{\partial f_5}{\partial x}(x, y) = 2x - 2 \quad \text{ i } \quad \frac{\partial f_5}{\partial y}(x, y) = 2y - 6.$$

Można uzasadnić, że funkcja f_5 jest różniczkowalna na $\mathbb{R}^2$. Funkcja f_5 ma jeden punkt stacjonarny: $(x_0, y_0) = (1, 3)$. W punkcie tym funkcja f_5 przyjmuje wartość minimalną, co wynika stąd, że

$$f_5(x, y) = (x - 1)^2 + (y - 3)^2 - 10.$$

Funkcja $f_6(x, y) = x^2 - y^2$ ma punkt jeden stacjonarny: $(x_0, y_0) = (0, 0)$; w punkcie tym nie przybiera wartości minimalnej ani maksymalnej.



Rysunek 11: Wykres funkcji f_5

Wypukłość funkcji wielu zmiennych

Definicję funkcji wypukłej jednej zmiennej można łatwo rozszerzyć na przypadek wielowymiarowy.

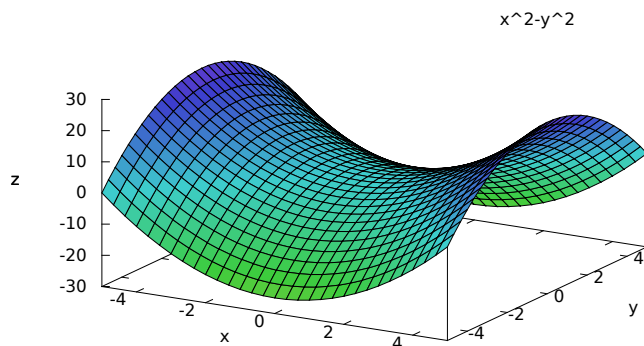
Dla funkcji n zmiennych f , która jest różniczkowalna i wypukła w $\mathbb{R}^n$ prawdziwa jest implikacja:

Jeśli $x_0 \in \mathbb{R}^n$ jest punktem stacjonarnym funkcji f to f osiąga w x_0 wartość minimalną.

Uwaga Można uzasadnić, że funkcja f_5 jest wypukła.

Uwagi o całce dwukrotnej

Pole trapezu krzywoliniowego można wyrazić za pomocą całki oznaczonej.



Rysunek 12: Wykres funkcji f_6

Objętość figur ograniczonych wykresem funkcji dwóch zmiennych oraz jedną (lub kilkoma) płaszczyznami można obliczyć korzystając z pojęcia całki wielokrotnej. Objętość figury ograniczonej przez wykres funkcji f_1 i płaszczyznę $z = 0$ jest równe $\frac{2\pi}{3}$ (połowie objętości kuli o promieniu 1).

Objętość tę można wyrazić jako całkę dwukrotną

$$\iint_P f_1(x, y) \, dx \, dy,$$

gdzie P oznacza prostokąt, którego wierzchołkami są punkty $P_1 = (-1, -1)$, $P_2 = (-1, 1)$, $P_3 = (1, 1)$, $P_4 = (1, -1)$.

Więcej informacji o całkach podwójnych i wielokrotnych można znaleźć w książkach [KW11] i [Fich80].

Zastosowania w teorii prawdopodobieństwa

W teorii prawdopodobieństwa jesteśmy w sposób szczególny zainteresowani funkcjami łącznej gęstości rozkładu pary zmiennych losowych.

Mówimy, że g jest funkcją łącznej gęstości rozkładu pewnej pary zmiennych losowych jeżeli jest ona nieujemna i spełnia warunek:

$$\iint_{\mathbb{R}^2} g(x, y) \, dx \, dy = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x, y) \, dx \, dy = 1.$$

Przykład Funkcja $\frac{3}{2\pi} f_3(x, y)$ jest funkcją łącznej gęstości pewnej pary zmiennych losowych.

Polecana literatura

[Bed04] T. Bednarski, Elementy matematyki w naukach ekonomicznych. Oficyna Ekonomiczna, Kraków 2004.

[Fich80] G. Fichtenholz, Rachunek Różniczkowy i całkowy, t.3, rozdz. XVI, PWN 1980.

[KW11] W. Krywicki, L. Włodarski, *Analiza matematyczna w zadaniach, część II*, rozdz. 1, PWN 2011.