

Pojęcie szeregu nieskończonego: zastosowania do rachunku prawdopodobieństwa — wykład 1

dr Mariusz Grządziel

25 lutego 2014

Paradoks Zenona z Elei — wersja uwspółcześniona

Zenek goni Andrzeja; prędkość Andrzeja: $v_A = 10 \frac{m}{s}$ prędkość Zenka: $v_Z = 5 \frac{m}{s}$ W czasie:

$$t_0 = 0 : s_A(t_0) = 0; s_Z(t_0) = 10; \quad (1)$$

$$t_1 = 1 : s_A(t_1) = 10; s_Z(t_1) = 15; \quad (2)$$

$$t_2 = 1,5 : s_A(t_2) = 15; s_Z(t_2) = 17,5 \quad (3)$$

$$\dots \quad (4)$$

To postępowanie można kontynuować w nieskończoność. Czy Zenek nigdy nie złapie Andrzeja?

Suma kolejnych wyrazów ciągu geometrycznego

$$s_A(t_k) = 10 + 10 \times \frac{1}{2} + \dots + 10 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}.$$

Czy $s_A(t_k)$ dąży do nieskończoności? Mamy:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} s_A(t_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} 10 \frac{\frac{1}{2^k} - 1}{\frac{1}{2} - 1} = 20 - 20 \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = 20,$$

bo $\lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = 0$

Granica ciągu geometrycznego dla ilorazu $q \in (-1, 1)$

Fakt. Niech $q \in (-1, 1)$. Wtedy

$$\lim_{k \rightarrow \infty} q^k = 0.$$

Dowód. Weźmy dowolny $\epsilon > 0$. Należy znaleźć $n_0 \in \mathbb{N}$ takie, że dla $n > n_0$

$$|q^n - 0| < \epsilon.$$

Mamy

$$|q^n - 0| = |q^n| = |q|^n < \epsilon \Leftrightarrow n > \log_{|q|} \epsilon,$$

więc można za n_0 przyjąć najmniejszą liczbę całkowitą większą lub równą $\log_{|q|} \epsilon$.

Szeregi nieskończone — definicje

Dla ciągu (a_n) , o wyrazach $a_1, a_2, a_3, \dots$ utwórzmy następujący ciąg:

$$s_1 = a_1, s_2 = a_1 + a_2, s_3 = a_1 + a_2 + a_3, \dots$$

Jeżeli ciąg (s_n) ma granicę, to granicę tę oznaczamy symbolem

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} s_n$$

i nazywamy ją sumą szeregu nieskończonego $a_1 + a_2 + a_3 + \dots$

Przykłady

- Dla $q \in (-1, 1)$ i $a \in \mathbb{R}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1} = \frac{a}{1-q};$$

- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$;
- $\sum_{n=1}^{\infty} 1^n = \infty$; (szereg jest rozbieżny do granicy niewłaściwej ∞) (dokładna definicja ciągu rozbieżnego do ∞ : [Kur08, str. 31]);
- $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n = \infty$ nie jest zbieżny do żadnej granicy (skończonej lub nieskończonej; jest rozbieżny).

Przykłady – c.d.

Jesteśmy zainteresowani obliczeniem sumy

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}. \quad (5)$$

Ciąg sum częściowych jest ograniczony, ponieważ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$.
Prawdziwe jest następujące twierdzenie:

Twierdzenie 1. *Ciąg niemalejący i ograniczony z góry jest zbieżny.*

Stąd suma (5) jest zbieżna do pewnej granicy g . Łatwo pokazać, że $g < 2$. Używając bardziej zaawansowanych metod można udowodnić, że $g = \pi^2/6$ (por. [Kur08, str. 231]).

Liczba e

Rozważmy ciąg

$$e_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Można sprawdzić, że:

$$e_1 = 2; e_2 = 2,25; e_{10} = 2,594; e_{100} = 2,705.$$

Fakt. Można pokazać, że ciąg (e_n) jest rosnący.

Fakt. Dla każdego n zachodzi $e_n \leq 3$

Z powyższych faktów, oraz z twierdzenia, które mówi, że ciąg rosnący i ograniczony z góry jest zbieżny (por. G. Fichtenholz, rachunek różniczkowy i całkowy, t.1, rozdz. 34), wynika, że

Twierdzenie 2. Ciąg

$$e_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

jest zbieżny.

Granice tego ciągu będziemy oznaczać przez e (od matematyka szwajcarskiego L. Eulera (1707-1783)):

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Liczba e z dokładnością do 10 cyfr po przecinku jest równa

$$2,7182818285.$$

Liczba e — inna definicja

$$e \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}.$$

Dowód równoważności tej definicji z podaną poprzednio: ćwiczenia.

Obliczanie przybliżonej wartości liczby e

Oznaczmy

$$s_n \equiv \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} = 1 + 1 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n}.$$

Mamy:

$$e - s_n = \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \frac{1}{(n+3)!} + \dots \leq \quad (6)$$

$$= \frac{1}{(n+1)!} \left[1 + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} + \dots \right] = \frac{1}{n!n}, \quad (7)$$

więc

$$0 < e - s_n < \frac{1}{n!n}.$$

Stąd np. s_7 przybliży liczbę e z błędem mniejszym niż 10^{-4} , (ponieważ $7! \cdot 7 = 35280$).

Logarytm naturalny i funkcja eksponens

Logarytm przy podstawie e nazywamy logarytmem naturalnym i oznaczamy przez $\ln$; $\ln x = \log_e x$. Funkcję wykładniczą przy podstawie e nazywamy eksponens i oznaczamy $\exp$; $\exp x = e^x$.

Funkcja eksponencjalna jako suma szeregu potęgowego

Dla dowolnego $x \in \mathbb{R}$

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \dots \quad (8)$$

Dowód można znaleźć np. w [Kur08, str. 142].

Wniosek W otoczeniu $(-\epsilon, \epsilon)$, gdzie ϵ jest odpowiednio „małą” liczbą dodatnią, wykres funkcji $y = e^x$ może być przybliżony („sensownie”) przez wykres funkcji $y = 1 + x$. W szczególności, wykres funkcji $y = e^x$ przecina oś OY pod kątem 45 stopni; funkcja wykładnicza dla $y = a^x$, gdzie $a \neq e$, nie posiada tej własności.

Uwaga Równość (8) może być wykorzystana do zdefiniowania funkcji wykładniczej dla argumentu postaci $z = a + bi$, gdzie $a, b \in \mathbb{R}$, a $i = \sqrt{-1}$ jest „jednostką urojoną”.

Szereg harmoniczny

Definicja 1. Mówimy, że ciąg (a_n) jest zbieżny do ∞ , jeżeli dla każdej liczby r istnieje takie n_0 , że dla $n > n_0$ jest $a_n > r$.

Można pokazać, że ciąg sum częściowych (tzw. szereg harmoniczny)

$$s_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$$

jest zbieżny do nieskończoności.

Dowód ćwiczenia.

Zastosowania do teorii prawdopodobieństwa: Zmienna o rozkładzie geometrycznym

Doświadczenie losowe polega na wykonywaniu rzutów monetą aż do wypadnięcia orła (po raz pierwszy). Liczbę rzutów Z jest zmienną losową dyskretną.

Z niezależności zdarzeń:

$$P(Z = k) = \left(\frac{1}{2}\right)^k, \quad k = 1, 2, \dots$$

Zmienna losowa Z przykład dyskretnej zmiennej losowej, dla której zbiór wartości: $\{1, 2, \dots\}$ nie jest skończony.

Jeśli zamiast rzutu monetą rzucalibyśmy kostką, lub innym przedmiotem, i prawdopodobieństwo otrzymania interesującego nas wyniku byłoby równe $p \in (0, 1)$, to liczba rzutów, która została wykonana do momentu, gdy pojawił się interesujący nas wynik, miałaby rozkład geometryczny z parametrem p .

Powiemy, że zmienna losowa W ma rozkład geometryczny z parametrem $p \in (0, 1)$, jeżeli

$$P(W = k) = (1 - p)p^{k-1}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Zastosowania do teorii prawdopodobieństwa: zmienna o rozkładzie Poissona

Definicja 2. Mówimy, że zmienna losowa X ma rozkład Poissona z parametrem $\lambda > 0$, jeśli przyjmuje ona wartości w zbiorze $\{0, 1, 2, \dots\}$ oraz

$$P(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Rozkład Poissona może być zastosowany z powodzeniem do opisu takich cech jak liczba nasion chwastów wśród nasion trawy, liczba klientów zgłaszających się dziennie do banku, liczba wypadków drogowych na placu Grunwaldzkim w danym dniu itd.

Wskazówki bibliograficzne

Informacje o pojęciu szeregu można znaleźć w:

M. Zakrzewski, Markowe Wykłady z Matematyki: Analiza, GiS, 2013, rozdz. 20.

Inne przykłady zastosowań rozkładu Poissona można znaleźć w:

W. Feller, Wstęp do rachunku prawdopodobieństwa, t. 1, PWN 1977, rozdz. VI.5;

W. Oktała, Elementy statystyki matematycznej i metodyka doświadczalnictwa, PWN 1980, s. 61;