

Wykład 11: Podstawowe pojęcia rachunku prawdopodobieństwa

dr Mariusz Grządziel

13 maja 2013

Doświadczenie losowe

Doświadczenie nazywamy losowym, jeśli:

- może być powtarzane (w zasadzie) w tych samych warunkach;
- wynik jego nie może być przewidziany w sposób pewny;
- zbiór wszystkich możliwych wyników doświadczenia jest określony przed przeprowadzeniem doświadczenia.

Przykłady doświadczeń losowych

- Jesteśmy zainteresowani cenami mieszkań w mieście M. Pojedyncze doświadczenie polegałoby na znalezieniu ceny (ofertowej) mieszkania w tym mieście i zanotowaniu jej. Powtarzanie doświadczenia polegałoby na przeglądnięciu ofert dotyczących cen mieszkań, w odpowiednich serwisach internetowych, oraz zanotowaniu cen interesujących nas mieszkań.
- Jesteśmy zainteresowani liczbą jajek składanych przez ptaki (powiedzmy jerzyki). Pojedyncze doświadczenie polegałoby na zaobserwowaniu liczby jajek w zaobserwowanym gnieździe. Powtarzanie doświadczenia polegałoby na znajdowaniu gniazd jerzyków i notowaniu liczby jajek.

Przestrzeń zdarzeń elementarnych

Definicja 1. *Przestrzenią zdarzeń elementarnych nazywamy zbiór wszystkich możliwych wyników doświadczenia losowego. Pojedynczy element tej przestrzeni nazywać będziemy zdarzeniem elementarnym.*

Uwaga Przestrzeń zdarzeń elementarnych będziemy oznaczać symbolem S . W wielu podręcznikach przestrzeń zdarzeń elementarnych oznaczana jest symbolem Ω . Dowolny podzbiór przestrzeni zdarzeń elementarnych o skończonej liczbie elementów będziemy nazywać zdarzeniem.

Przestrzeń zdarzeń elementarnych – c.d.

W przypadku przestrzeni zdarzeń elementarnych o nieskończonej liczbie elementów, zdarzeniem nazywamy podzbiór przestrzeni zdarzeń elementarnych spełniający pewne dodatkowe założenia; dokładniej: zakładamy, że wszystkie rozważane zdarzenia należą do odpowiednio określonego σ -ciała zdarzeń losowych, por. Wykłady ze “Wstępu do teorii prawdopodobieństwa i statystyki” prof. A. Jurlewicz , Wykład 1,

www.im.pwr.wroc.pl/~agniesz/
wstep_do_rach_prawd_MAP2037/
Wstep_do_R_Pr_MAP2037_wyklad_1.pdf

Informacje o postulatach, jakie musi spełniać zbiór zdarzeń elementarnych, można znaleźć również w książce L. Gajka i M. Kałuski na str. 17

Uwaga W dalszym ciągu rozważań będziemy zakładali, że dla skończonych przestrzeni S odpowiednia rodziną zdarzeń jest zbiór wszystkich podzbiorów $\mathcal{S}$.

Przestrzeń zdarzeń elementarnych- przykłady

Przestrzenią zdarzeń elementarnych dla doświadczenia losowego :

- polegającego na losowym wyborze mieszkania, oferowanego do sprzedaży, i podaniu jego ceny jest $[0, \infty)$;
- polegającego na dwukrotnym rzucie monetą jest $\{OO, OR, RO, RR\}$; zapis OO oznacza: orzeł wypadł w pierwszym i drugim rzucie itd.;
- polegającego na dwukrotnym rzucie kostką jest $\{(1, 1), (1, 2), \dots, (6, 5), (6, 6)\}$.

Czym jest prawdopodobieństwo

Podejście częstościowe: rzucając monetą (uczciwą) N razy otrzymujemy n orłów—można oczekiwać, że n/N będzie dążyć do $1/2$ gdy $N \rightarrow \infty$

Podejście aksjomatyczne: każdemu zdarzeniu A , będącemu podzbiorem przestrzeni zdarzeń elementarnych $\mathcal{S}$ przyporządkowujemy liczbę $P(A)$, spełniającą warunki:

- $0 \leq P(A) \leq 1$;
- gdy $A = \emptyset$, $P(A) = 0$;
- gdy $A = \mathcal{S}$, $P(A) = 1$;
- Jeśli zdarzenia $A_1, A_2, A_3, \dots$ się wzajemnie wykluczają (tj. $A_i \cap A_j = \emptyset$ dla $i \neq j$) i suma $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots$ jest zdarzeniem, to

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + \dots$$

Prawdopodobieństwo— przykład

Rzucamy dwukrotnie kostką. Jakie jest prawdopodobieństwo, że suma oczek będzie mniejsza lub równa 3.

W naszym przypadku $\mathcal{S} = \{(1, 1), (1, 2), \dots, (6, 5), (6, 6)\}$; przyjmujemy, że prawdopodobieństwo wszystkich zdarzeń elementarnych jest równe $\frac{1}{6 \times 6} = \frac{1}{36}$. Zdarzenie A , odpowiadające wyrzuceniu nie więcej niż 3 oczek, ma postać: $A = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1)\}$. Stąd $P(A) = 3 \times \frac{1}{36} = \frac{1}{12}$.

Założenie o jednakowym prawdopodobieństwie zdarzeń elementarnych

Uwaga. Z formalnego punktu widzenia moglibyśmy przyjąć w rozważanym przykładzie np.

$$P((1, 1)) = P((1, 2)) = \frac{1}{2}, \quad P((1, 3)) = P((1, 4)) = \dots = P((6, 6)) = 0,$$

lecz otrzymany w ten sposób model matematyczny nie będzie „sensownie” opisywał naszego doświadczenia losowego.

Prawdopodobieństwo warunkowe — „przykład wprowadzający”

Rzucamy kostką „uczciwą”; $\mathcal{S} = \{s_1, \dots, s_6\}$,

$$P(s_i) = \frac{1}{6}, \quad i = 1, \dots, 6$$

Dla $A \subset \mathcal{S}$

$$P(A) = \frac{\#A\{s_i \in A\}}{\#\{s_i \in \mathcal{S}\}},$$

gdzie dla dowolnego skończonego zbioru A symbol $\#A$ oznacza licznosc zbioru A .

Dodatkowe założenie Jedyne możliwe wyniki są liczbami podzielnymi przez 3.

Niech $B = \{s_3, s_6\}$. Przyjmijmy, że mamy do czynienia z nową przestrzenią zdarzeń elementarnych $\mathcal{S}_1 = B$.

Oznaczenie Prawdopodobieństwo zdarzenia A w przestrzeni $\mathcal{S}_1$ będziemy oznaczać przez $P(A|B)$.

Prawdopodobieństwo warunkowe — „przykład wprowadzający”, c.d.

Na ogół $P(A)$ nie jest równe $P(A|B)$; np.

Dla $A = \{s_3\}$

$$P(A) = \frac{1}{6} \quad \text{ i } \quad P(A|B) = \frac{\#A\{s_i \in A \cap B\}}{\#\{s_i \in B\}} = \frac{1}{2},$$

Dla $A = \{s_1\}$

$$P(A) = \frac{1}{6} \quad \text{ i } \quad P(A|B) = \frac{\#A\{s_i \in A \cap B\}}{\#\{s_i \in B\}} = 0.$$

Obserwacja W obu przypadkach $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$.

Definicja 2. Dla $A, B \in \mathcal{S}$ i $P(B) > 0$ przyjmujemy $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$.

Prawdopodobieństwo całkowite

Twierdzenie 1. Niech zbiory $A_1, A_2, \dots, A_n$ spełniają warunki:

- $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = \mathcal{S}$;
- $A_i \cap A_j = \emptyset$ dla $i \neq j$;
- $P(A_i) > 0$ dla $i = 1, 2, \dots, n$.

Wtedy dla każdego zdarzenia $A \in \mathcal{S}$ ma miejsce następujący wzór na prawdopodobieństwo całkowite:

$$P(A) = P(A_1)P(A|A_1) + \dots + P(A_n)P(A|A_n)$$

Twierdzenie Bayesa

Twierdzenie 2. Twierdzenie Bayesa

Przy założeniach Twierdzenia 1

$$P(A_i|A) = \frac{P(A|A_i)P(A_i)}{P(A|A_1)P(A_1) + \dots + P(A|A_n)P(A_n)}$$

dla $i = 1, \dots, n$.

dowód Należy skorzystać z równości $P(A_i|A)P(A) = P(A_i \cap A) = P(A|A_i)P(A_i)$

Przykład

Prawdopodobieństwo awarii w ciągu roku zespołu napędowego samochodu marki X wynosi

- 0,02 przy stosowaniu oleju marki A;
- 0,03 przy stosowaniu oleju marki B.

Wiadomo, że spośród kierowców jeżdżących samochodami marki X

- 80% używa oleju marki A;
- 20% używa oleju marki B.

Jakie jest prawdopodobieństwo awarii zespołu napędowego (w ciągu roku) losowo wybranego samochodu marki X?

Przykład – c.d.

Rozwiązanie Oznaczmy: A_1 : kierowca stosuje olej marki A; A_2 : kierowca stosuje olej marki B; A - zespół napędowy ulega awarii w ciągu roku. Korzystając ze wzoru na prawdopodobieństwo całkowite otrzymujemy:

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A|A_1)P(A_1) + P(A|A_2)P(A_2) = \\ &= 0,02 \cdot 0,8 + 0,03 \cdot 0,2 = 0,022. \end{aligned}$$

Prawdopodobieństwo, że losowo wybrany pojazd spośród samochodów, których zespół napędowy uległ awarii w danym roku, jest marki A można obliczyć korzystając z twierdzenia Bayesa:

$$P(A_1|A) = \frac{0,02 \cdot 0,8}{0,02 \cdot 0,8 + 0,03 \cdot 0,2} \approx 0,73.$$

Niezależność zdarzeń

Niezależność zdarzeń wiążemy z brakiem zależności przyczynowo- skutkowej. Można uznać za niezależne:

- wyniki kolejnych rzutów kostką;
- ustanowienie rekordu świata w skoku w dal na najbliższej olimpiadzie i utworzenie nowego województwa do końca bieżącego roku

Definicja 3. Mówimy, że zdarzenia A i B są niezależne, jeżeli

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B).$$

Niezależność dla więcej niż dwóch zdarzeń— patrz [KM01], Definicja 2.7.

Uwaga Jeżeli A i B są niezależne i $P(B) > 0$, to

$$P(A|B) = P(A).$$

Niezależność zdarzeń— przykłady

W przykładzie z rzutem dwoma kostkami: zdarzenie A — „wynik pierwszego rzutu jest równy jeden” i zdarzenie B — „wynik drugiego rzutu jest równy 5” są niezależne, gdyż

$$P(A) = P(B) = \frac{1}{6} \text{ oraz } P(A \cap B) = P((1, 5)) = \frac{1}{36}.$$

Lektura uzupełniająca

[GK00] Gajek, L., Kałużka, M., Wnioskowanie matematyczne, modele i metody. WNT 2000.

[KM01] Koronacki, J., Mielniczuk, J. Statystyka dla studentów kierunków technicznych i przyrodniczych. WNT. Warszawa 2001, podrozdział 2.1.2, str. 62-79.