

Zmienne losowe

dr Mariusz Grządział

Wykład 12; 20 maja 2014

Definicja 1. *Zmienną losową nazywamy dyskretną (skokową), jeśli zbiór jej wartości $x_1, x_2, \dots$, można ustawić w ciąg.*

Zmienna losowa X , która przyjmuje wszystkie wartości z zadanego przedziału (a, b) , nie jest zmienną losową dyskretną, ponieważ elementów tego przedziału nie da się ustawić w ciąg ("ponumerować").

- G. Cantor 1873— twierdzenie— wszystkich liczb rzeczywistych nie da się ustawić w ciąg.

Rozkład dyskretny zmiennej losowej

Zbiór wartości dyskretny zmiennej losowej X — ciąg $x_1, x_2, \dots$, (skończony lub nieskończony).

Rozkład zmiennej losowej dyskretny X jest określony przez nieujemne liczby $p_1, p_2, \dots$ spełniające warunki:

$$\sum p_i = 1, \quad (1)$$

$$p_i = P(X = x_i). \quad (2)$$

Dyskretne zmienne losowe— przykłady

Przykłady:

- Rozkład U , sumy oczek w dwukrotnym rzucie kostką;
- Rozkład Z , gdzie Z oznacza liczbę rzutów monetą, po której po raz pierwszy wypada orzeł (zdarzeniu polegającemu na tym, że orzeł wypadnie już w pierwszym rzucie, odpowiada wartość zmiennej Z równa 0).

z niezależności zdarzeń:

$$P(Z = k) = \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Zmienna losowa Z przykład dyskretny zmiennej losowej, dla której zbiór wartości: $\{0, 1, 2, \dots\}$ nie jest skończony.

Dystrybuanta rozkładu dyskretnego

Przypomnijmy, że dystrybuantę F_X rozkładu zmiennej losowej X określamy wzorem:

$$F_X(t) = P(X \leq t).$$

Można udowodnić, że dystrybuanta zmiennej losowej dyskretnej jest funkcją:

- przedziałami stałą (schodkową);
- prawostronnie ciągłą.

Przykład

Jeśli V ma rozkład $\text{Bin}(2; 0,8)$, to jej dystrybuanta F_V dana wzorem

$$F_V(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 0,04 & x \in [0, 1) \\ 0,36 & x \in [1, 2) \\ 1 & x \in [2, \infty) \end{cases}$$

Funkcja kwantylowa

Jeśli zmienna losowa X ma dystrybuantę ciągłą i rosnącą na $\mathbb{R}$ (zbiorem wartości F_X jest $(0, 1)$), to funkcję kwantylową Q_X określamy jako funkcję odwrotną do dystrybuanty F_X .

Jeśli F_X jest ściśle rosnąca na przedziale $\mathcal{I}$, a dla argumentów spoza tego przedziału przybiera wartości 0 lub 1, to funkcję kwantylową określamy jako funkcję odwrotną do funkcji G_X , której dziedzina jest równa $\mathcal{I}$, określoną wzorem

$$G_X(t) = F_X(t), \quad t \in \mathcal{I}.$$

Przykład

Dla zmiennej losowej Y o rozkładzie jednostajnym $U(0, 1)$, której gęstość g dana jest wzorem

$$g(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & x \in [0, 1] \\ 0 & x \in (1, \infty) \end{cases}$$

funkcja kwantylowa Q_Y jest dana wzorem:

$$Q_Y(t) = t, \quad t \in (0, 1).$$

Przykład

Dla zmiennej losowej W typu ciągłego, której gęstość h dana jest wzorem

$$h(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ x/2 & x \in [0, 2] \\ 0 & x \in (2, \infty) \end{cases}$$

funkcja kwantylowa Q_W jest dana wzorem:

$$Q_W(t) = 2\sqrt{t}, \quad t \in (0, 1).$$

Funkcja kwantylowa — c.d.

Dla dyskretnej zmiennej losowej X (i dla zmiennych, które nie są dyskretne, ale nie spełniają wyżej wymienionych warunków) funkcję kwantylową Q_X można określić wzorem

$$Q_X(u) = \min\{t \in \mathbb{R} : F_X(t) \geq u\}, \quad u \in (0, 1),$$

gdzie F_X oznacza dystrybucję zmiennej losowej X .

Uwaga Definicję tę można stosować dla dowolnej zmiennej losowej; w przypadku, gdy zmienna losowa ma dystrybucję:

- rosnącą na $\mathbb{R}$;
- rosnącą na przedziale $\mathcal{I}$, a dla argumentów spoza tego przedziału przyjmuje wartości 0 lub 1,

wartości funkcji $Q_X(u)$ są równe wartościom funkcji kwantylowej zdefiniowanej uprzednio dla tych szczególnych klas zmiennych losowych.

Przykład

Dla zmiennej losowej V funkcja kwantylowa Q_V ma postać

$$Q_V(t) = \begin{cases} 0, & t \in (0; 0,04]; \\ 1, & t \in (0,04; 0,36]; \\ 2, & t \in (0,36; 1); \end{cases}$$

Zmienne losowe typu ciągłego

Definicja 2. Mówimy, że zmienna losowa X jest typu ciągłego, jeśli istnieje nieujemna funkcja g taka, że dla każdych $-\infty \leq a < b \leq \infty$

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b g(x) dx.$$

Funkcja g — to tzw. funkcja gęstości rozkładu zmiennej losowej X .

Zmienna losowa o rozkładzie wykładniczym

Mówimy, że zmienna losowa typu ciągłego X ma rozkład wykładniczy z parametrem $\lambda > 0$ jeżeli jej funkcja gęstości g ma postać

$$g(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0. \end{cases} \quad (3)$$

Zmienna losowa o rozkładzie wykładniczym: zastosowania

- czas bezawaryjnej pracy pewnych przedmiotów (urządzeń), takich jak np. żarówka;
- czas oczekiwania na rozpad cząsteczki radioaktywnej;
- wartości maksymalne dziennego opadu w danym roku.

Można uzasadnić, że jeśli X ma rozkład wykładniczy z parametrem $\lambda > 0$, to

$$F_X(t) = 1 - e^{-\lambda t}$$

oraz

$$EX = \lambda^{-1}, \quad \text{Var} X = \lambda^{-2}.$$

Rozkład wykładniczy: „brak pamięci”

Niech X będzie zmienną losową o rozkładzie wykładniczym z parametrem $\lambda > 0$. Dla dowolnych a i b dodatnich prawdziwa jest równość:

$$P(X > a + b | X \geq a) = P(X > b).$$

Istotnie

$$\begin{aligned} P(X > a + b | X > a) &= \frac{P(X > a + b) \wedge P(X > a)}{P(X > a)} = \\ &= \frac{P(X > a + b)}{P(X > a)} = \frac{\exp[-\lambda(a + b)]}{\exp[-\lambda(a)]} = \exp[-\lambda b] = P(X > b). \end{aligned}$$

Interpretacja: X jest czasem bezawaryjnej pracy pewnego urządzenia, to niezależnie od dotychczasowego czasu pracy tego urządzenia, dalszy czas pracy ma taki sam rozkład jak „całkowity czas pracy” (czyli rozkład wykładniczy z parametrem λ).

Zmienna losowa o rozkładzie wykładniczym: przykład zastosowań

Czas życia żarówki X jest zmienną losową o rozkładzie wykładniczym z wartością oczekiwaną równą 10 (jednostką pomiaru jest miesiąc). Chcemy obliczyć:

- prawdopodobieństwo, że żarówka będzie „bezawaryjnie funkcjonować” przez 15 miesięcy;
- kwantyl rzędu 0,95 czasu życia żarówki.

Rozwiązanie Zmienna losowa X ma rozkład wykładniczy z parametrem $\lambda = 1/10$.

$$P(X \geq 15) = 1 - \int_0^{15} \frac{1}{10} e^{-x/10} dx = 1 - [-e^{-x/10}]_0^{15} = e^{-3/2} \approx 0,2231302.$$

Prawdopodobieństwo to można obliczyć wykorzystując pakiet R w następujący sposób:

```
> 1-pexp(3/2)
[1] 0.2231302
```

Zmienna losowa o rozkładzie wykładniczym: przykład zastosowań — c.d.

Oznaczmy kwantyl rzędu 0,95 dla rozkładu zmiennej X mającej rozkład wykładniczy z parametrem $\lambda = 0,1$ przez c . Stała c spełnia jest rozwiązaniem równania:

$$\int_0^c \frac{1}{10} e^{-x/10} dx = 0,95.$$

Stąd:

$$1 - e^{-c/10} = 0,95;$$

$$e^{-c/10} = 0,05;$$

$$-c/10 = \log 0,05 = -\log 20;$$

$$c = 10 \log 20 \approx 29,95732.$$

Kwantyl ten można obliczyć przy użyciu R:

```
> qexp(0.95, 0.1)
[1] 29.95732
```

Lektura uzupełniająca

T. Bednarski, Elementy matematyki w naukach ekonomicznych. Oficyna ekonomiczna. Kraków 2004, str. 228–234.

Koronacki, J., Mielniczuk, J. Statystyka dla studentów kierunków technicznych i przyrodniczych. WNT. Warszawa 2001, podrozdział 2.2.1, str. 94–110.