1. Oblicz pole figury ograniczonej wykresem funkcji $f(x) = x^3$, oraz prostymi: $x = 1$ oraz $y = 0$.
   Wskazówka. Wyraź pole jako granicę odpowiedniego ciągu, a następnie skorzystaj ze wzoru:
$$1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

2. Oblicz pole figury ograniczonej wykresem funkcji $f(x) = x^4$, oraz prostymi: $x = 1$ oraz $y = 0$.
   Wskazówka. Wyraź pole jako granicę odpowiedniego ciągu, a następnie skorzystaj ze wzoru:
$$1^4 + 2^4 + \ldots + n^4 = \frac{6\,n^5 + 15\,n^4 + 10\,n^3 - n}{30}.$$

3. Korzystając z twierdzeń o arytmetyce granic ciągów obliczyć podane granice ciągów:
   (a) $\lim_{n\to\infty} \frac{n-1}{n+4}$;
   (b) $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+1}{n^2+4}$;
   (c) $\lim_{n\to\infty} \frac{n^3+2n^2+1}{n-3n^3}$.

4. Obliczyć, jaką wartość liczbową przedstawia ułamek okresowy
$$0{,}(12) = 0{,}121212\ldots$$

5. Pan X umieszcza w banku B 1 (jeden) złoty na lokacie. Oprocentowanie w skali rocznej wynosi 100%. Jeżeli odsetki byłyby doliczane po upływie roku, kwota którą pan X otrzymałby po zakończeniu rocznego okresu lokaty wynosiłaby 2 złote. Jeśli odsetki byłyby doliczane po upływie pół roku, pan X po upływie roku otrzymałby $(1+\frac{1}{2})^2$ złotego.

   Obliczyć kwotę, którą pan X otrzymałby po upływie roku w przypadku kapitalizacji:

   (a) kwartalnej (po upływie każdego kwartału kwota na lokacie zostaje powiększona o 25%);
   (b) miesięcznej (po upływie każdego miesiąca kwota na lokacie zostaje powiększona o $1/12$);
   (c) dziennej (po upływie każdego dnia kwota na lokacie zostaje powiększona o $1/365$ — zakładamy, że rok, w którym kwota jest wpłacana oraz rok po nim następujący, nie są latami przestępnymi).

   Oznaczmy przez e_n kwotę, jaką otrzymałby pan X w przypadku, gdy sposób kapitalizacji odpowiadałby podziałowi roku na n równych przedziałów czasowych: $e_n = (1+\frac{1}{n})^n$.

   Można pokazać, że $\lim_{n\to\infty} e_n = e$, gdzie $e = 2{,}718281828459045...$ jest liczbą niewymierną (por. notatki do Wykładu 3-go).

   Kapitalizacja ciągłą odsetek odpowiada liczbie przedziałów n, na które dzielimy rok, dążącej do nieskończoności. Jaka byłaby różnica pomiędzy kwotą, otrzymaną przez pana X, po zakończeniu rocznego okresu lokaty, w przypadku gdy kapitalizacja jest ciągła, a kwotą, którą otrzymałby pan X, w przypadku:

   (d) kapitalizacji miesięcznej?
   (e) kapitalizacji kwartalnej?

   Obliczenia należy wykonać z dokładnością do dwóch cyfr po przecinku (czyli do jednego grosza).

Mariusz Grządziel