1. Funkcja f dana jest wzorem
$$f(x) = ax + b.$$
Przyjmujemy, że $D_f = \mathbb{R}$. Udowodnij, że dla dowolnego $x_0 \in \mathbb{R}$ prawdziwa jest równość $f'(x_0) = a$.

2. Funkcja f dana jest wzorem
$$f(x) = x^2.$$
Przyjmujemy, że $D_f = \mathbb{R}$. Udowodnij, że dla dowolnego $x_0 \in \mathbb{R}$ prawdziwa jest równość $f'(x_0) = 2x_0$.

3. Funkcja kwadratowa f dana jest wzorem
$$f(x) = ax^2 + bx + c,$$
gdzie a, b i c są pewnymi ustalonymi liczbami rzeczywistymi. Przyjmujemy, że $D_f = \mathbb{R}$. Udowodnij, że dla dowolnego $x_0 \in \mathbb{R}$ prawdziwa jest równość $f'(x_0) = 2ax_0 + b$.

   Wskazówka Można wykorzystać z równości, które należało udowodnić w poprzednich dwóch zadaniach oraz z twierdzenia o arytmetyce granic funkcji.

4. Ołowiana kulkę, rzucona (pionowo) do góry z prędkością $v_0 = 20m/s$. Wysokość kulki $h(t)$ w czasie t jest równa
$$h(t) = v_0 t - g\frac{t^2}{2}.$$
Przyjmujemy wartość $g = 10\frac{m}{s^2}$.

   Dziedzina funkcji h (oznaczona przez D_h) jest określona równością $D_h = [0, 4]$.

   Wyznacz:

   (a) równanie siecznej odpowiadających funkcji h, punktowi $t_0 = 1$ i przyrostowi $\Delta t = 0{,}5$;

   (b) wartość pochodnej funkcji h dla $t_0 = 1$;

   (c) równanie stycznej do wykresu funkcji h w punkcie $(1, 15)$.

   Naszkicuj na jednym rysunku wykres funkcji h oraz sieczną i styczną, których równania zostały wyznaczone (w podpunktach (a) i (c)).

   Następnie wyznacz:

   (d) równanie siecznej odpowiadających funkcji h, punktowi $t_0 = 2$ i przyrostowi $\Delta t = -1$;

   (e) wartość pochodnej funkcji h dla $t_0 = 2$;

   (f) równanie stycznej do wykresu funkcji h w punkcie $(2, 20)$

   i naszkicuj na jednym rysunku wykres funkcji h oraz sieczną i styczną, których równania zostały wyznaczone (w podpunktach (d) i (f)).

5. Oblicz pochodne: prawostronną i lewostronną funkcji f w punkcie $x_0 = 0$ dla funkcji określonej wzorem
$$f(x) = 2|x|.$$
   (a) Czy funkcja f jest różniczkowalna w punkcie $x_0 = 0$?

(b) Czy funkcja $f$jest różniczkowalna w innych punktach prostej? Innymi słowy: Czy jest różniczkowalna w punkcie $x_0 \neq 0$?

6. Uzasadnij, że funkcja f określona wzorem

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x < 1, \\ 2x - 1, & x \geqslant 1, \end{cases}$$

jest różniczkowalna w $x_0 = 1$ (a także na $(-\infty, \infty)$). Naszkicuj wykres funkcji f.
Wskazówka. Należy najpierw uzasadnić ciągłość funkcji f w punkcie $x_0 = 1$, a następnie obliczyć pochodne: lewostronną i prawostronną funkcji f w punkcie $x_0 = 1$. Można skorzystać z równości

$$f'_-(x_0) = g'(x_0), \quad f'_+(x_0) = f'(x_0),$$

gdzie funkcje g i h są określone przez

$$g(x) = x^2, \quad h(x) = 2x - 1, \quad D_g = D_h = \mathbb{R}.$$

7. Uzasadnij, że funkcja f określona wzorem

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x < 1, \\ x, & x \geqslant 1, \end{cases}$$

jest ciągła w $x_0 = 1$, lecz nie jest w tym punkcie różniczkowalna. Naszkicuj wykres funkcji f.
Wskazówka. Należy najpierw uzasadnić ciągłość funkcji f w punkcie $x_0 = 1$ a następnie porównać $f'_-(x_0)$ i $f'_+(x_0)$; pochodne te można obliczyć wyznaczając wartości pochodnych funkcji g i h, danymi wzorami $g(x) = x^2$ i $h(x) = x$, w punkcie $x_0 = 1$.